Cognome	Nome	Matricola	Firma

E-mail:

Problema 1. Una fenditura è costituita da due lastre quadrate di lato L, poste ad una distanza H l'una dall'altra. Nella fenditura c'è un liquido di viscosità μ e densità ρ. Tra imbocco e sbocco della fenditura (sezioni 1 e 2) c'è una differenza di pressione pari a ΔP. La fenditura superiore è in moto verso destra con velocità V, mentre la fenditura inferiore è ferma. Determinare:

1. Il profilo degli sforzi e la posizione, se esiste, in cui lo sforzo è nullo,
2. Il profilo di velocità,
3. La posizione, se esiste, in cui la velocità è nulla (diversa da $y = 0$).

Dati. $L = 1$ m, $H = 2$ cm, $\mu = 1$ cP, $\rho = 1$ g/cm^3, $\Delta P = 2 \cdot 10^{-4}$ bar, $V = 1$ m/s.

Problema 2. Un bicchiere contenente un volume V_I di una bevanda gassata (assimilabile ad una soluzione acquosa di CO_2, con una frazione molare iniziale di CO_2 pari a x_{A0}) viene introdotto in un frigorifero (volume V_{II}, pieno d'aria alla pressione P, alla temperatura T e con una frazione molare iniziale di CO_2 pari a y_{A0}). Assumendo che entrambi i recipienti si possano considerare perfettamente miscelati, che all'interfaccia, di area A, sussista la relazione di equilibrio $P_A = H' C_A^{liq}$, e che i coefficienti di scambio di materia nelle due fasi siano pari a k_x e k_y:

1. Esprimere la relazione di equilibrio in termini di frazioni molari, $y_A = m x_A$ (determinare m).
2. Calcolare il flusso iniziale di CO_2, chiarendone anche il verso (dalla bevanda all'aria o vice-versa).
3. Calcolare dopo quanto tempo la differenza tra le due concentrazioni (tenendo conto dell'equilibrio) si riduce ad un decimo di quella iniziale.

Dati. $V_I = 200$ mL, $x_{A0} = 4 \cdot 10^{-4}$, $V_{II} = 50$ L, $P = 1$ bar, $T = 4$°C, $y_{A0} = 0.003$, $A = 20$ cm^2,
$H' = 0.055$ bar·m^3/mol, $k_x = 2000$ mol/(m^2·hr), $k_y = 1$ mol/(m^2·hr).

Problema 1. Una fenditura è costituita da due lastre quadrate di lato L, poste ad una distanza H l'una dall'altra. Nella fenditura c'è un liquido di viscosità μ e densità ρ. Tra imbocco e sbocco della fenditura (sezioni 1 e 2) c'è una differenza di pressione pari a ΔP. La fenditura superiore è in moto verso destra con velocità V, mentre la fenditura inferiore è ferma. Determinare:

1. Il profilo degli sforzi e la posizione, se esiste, in cui lo sforzo è nullo,
2. Il profilo di velocità,
3. La posizione, se esiste, in cui la velocità è nulla (diversa da $y = 0$).

Dati. $L = 1$ m, $H = 2$ cm, $\mu = 1$ cP, $\rho = 1$ g/cm³, $\Delta P = 2{\cdot}10^{-4}$ bar, $V = 1$ m/s.

$L := 1m \qquad H := 2\cdot cm \qquad \mu := 1\cdot\frac{poise}{100} \qquad \rho := 1\cdot\frac{gm}{cm^3} \qquad \Delta P := 2\cdot 10^{-4}\cdot bar \qquad V := 1\cdot\frac{m}{s}$

Bilancio microscopico di componente x della quantità di moto

$$\frac{d}{dy}\tau_{yx} = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \quad ==> \quad \tau_{yx} = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot y + C_1 \quad \text{(A)} \quad ==> \quad -\mu\cdot\frac{d}{dy}v_x = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot y + C_1$$

$$v_x = -\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot y^2 - \frac{C_1}{\mu}\cdot y + C_2 \qquad \text{(B)}$$

BC1 $\quad y = 0 \quad v_x = 0 \quad ==> \quad C_2 = 0$

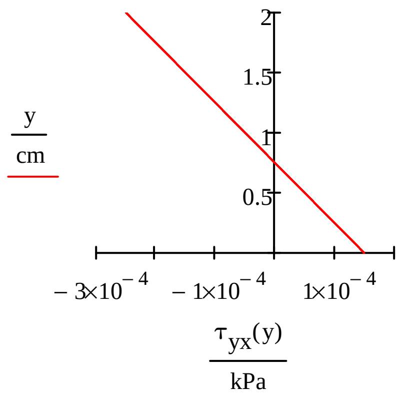
BC2 $\quad y = H \quad v_x = V \quad ==> \quad V = -\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot H^2 - \frac{C_1}{\mu}\cdot H \quad ==> \quad C_1 = -\frac{\mu}{H}\cdot\left[V + \frac{H^2}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\right]$

Sostituendo C.1 in (A)

$$\tau_{yx}(y) := \left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot y - \frac{\mu}{H}\cdot\left[V + \frac{H^2}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\right]$$

$$y^\circ := \frac{\frac{\mu}{H}\cdot\left[V + \frac{H^2}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\right]}{\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)} = 0.75\cdot cm$$

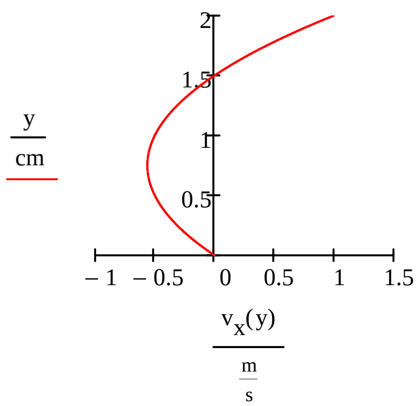
$y := 0\cdot cm, 0.0001\cdot cm .. H$



Sostituendo C.1 in (B)

$$v_x(y) := \frac{H^2}{2\cdot\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot\left[\frac{y}{H} - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right] + V\cdot\frac{y}{H}$$

$$y^{\circ\circ} := \frac{H^2\cdot\Delta P - 2\cdot L\cdot V\cdot\mu}{H\cdot\Delta P} = 1.5\cdot cm$$



Problema 2. Un bicchiere contenente un volume V_I di una bevanda gassata (assimilabile ad una soluzione acquosa di CO_2, con una frazione molare iniziale di CO_2 pari a x_{A0}) viene introdotto in un frigorifero (volume V_{II}, pieno d'aria alla pressione P, alla temperatura T e con una frazione molare iniziale di CO_2 pari a y_{A0}). Assumendo che entrambi i recipienti si possano considerare perfettamente miscelati, che all'interfaccia, di area A, sussista la relazione di equilibrio $P_A = H' C_A^{liq}$, e che i coefficienti di scambio di materia nelle due fasi siano pari a k_x e k_y:

1. Esprimere la relazione di equilibrio in termini di frazioni molari, $y_A = m x_A$ (determinare m).
2. Calcolare il flusso iniziale di CO_2, chiarendone anche il verso (dalla bevanda all'aria o vice-versa).
3. Calcolare dopo quanto tempo la differenza tra le due concentrazioni (tenendo conto dell'equilibrio) si riduce ad un decimo di quella iniziale.

Dati. $V_I = 200$ mL, $x_{A0} = 4{\cdot}10^{-4}$, $V_{II} = 50$ L, $P = 1$ bar, $T = 4°C$, $y_{A0} = 0.003$, $A = 20$ cm², $H' = 0.055$ bar·m³/mol, $k_x = 2000$ mol/(m²·hr), $k_y = 1$ mol/(m²·hr).

$V_I := 200\cdot mL \quad x_{A0} := 4\cdot 10^{-4} \quad V_{II} := 50\cdot liter \quad y_{A0} := 0.003 \quad k_x := 2000\cdot\frac{mol}{m^2\cdot hr} \quad k_y := 1\cdot\frac{mol}{m^2\cdot hr}$

$H° := 0.055\cdot\frac{bar\cdot m^3}{mol} \quad \rho_{acqua} := 1000\cdot\frac{kg}{m^3} \quad MM_{acqua} := 18\cdot\frac{gm}{mol} \quad P := 1\cdot bar \quad T := 4\,°C \quad A := 20\cdot cm^2$

$\rho_{aria} := \rho_A(T) = 1.284\frac{kg}{m^3} \quad MM_{aria} := 29\cdot\frac{gm}{mol}$

$$P_A = y_A\cdot P = H°\cdot C_A = H°\cdot C_{tot}\cdot x_A = H°\cdot\frac{n_{tot}}{V_I}\cdot x_A = H°\cdot\frac{\rho_{acqua}}{MM_{acqua}}\cdot x_A = H\cdot x_A \quad ==> \quad \boxed{y_A = \frac{H}{P}\cdot x_A}$$

$$H := H°\cdot\frac{\rho_{acqua}}{MM_{acqua}} = 3.056\times 10^3\cdot bar \qquad \boxed{m := \frac{H}{P} = 3.056\times 10^3}$$

$y°_{A0} := m\cdot x_{A0} = 1.222$

La concentrazione in fase liquida è più alta di quella in fase gas (y°.A0 è la conc. in una ipotetica fase gas che si sostituisse alla fase liquida), quindi il flusso va dal liquido al gas.

$$K_x := \left(\frac{1}{k_x} + \frac{1}{m\cdot k_y}\right)^{-1} = 1.209\times 10^3\cdot\frac{mol}{m^2\cdot hr} \qquad \boxed{N_{A0} := K_x\cdot\left(x_{A0} - \frac{y_{A0}}{m}\right) = 0.482\cdot\frac{mol}{m^2\cdot hr}}$$

Immaginando che entrambe le fasi siano diluite

Bilancio sul bicchiere (A) $n_{liq.tot}\cdot\left(\frac{d}{dt}x_A(t)\right) = -A\cdot K_x\cdot\left(x_A(t) - \frac{y_A(t)}{m}\right)$ $n_{liq.tot} := \frac{\rho_{acqua}\cdot V_I}{MM_{acqua}} = 11.111\,mol$

Bilancio sull'aria nel frigo (B) $n_{gas.tot}\cdot\left(\frac{d}{dt}y_A(t)\right) = A\cdot K_x\cdot\left(x_A(t) - \frac{y_A(t)}{m}\right)$ $n_{gas.tot} := \frac{\rho_{aria}\cdot V_{II}}{MM_{aria}} = 2.215\,mol$

$\delta_A(t) = x_A(t) - \frac{y_A(t)}{m}$ $\delta_{A0} := x_{A0} - \frac{y_{A0}}{m} = 3.99\times 10^{-4}$

$$\frac{d}{dt}x_A(t) = \frac{-A\cdot K_x}{n_{liq.tot}}\cdot\left(x_A(t) - \frac{y_A(t)}{m}\right) = -\frac{1}{n_{liq.tot}}\cdot A\cdot K_x\cdot\delta_A(t)$$

dividendo (B) per m

$$\frac{d}{dt}\frac{y_A(t)}{m} = \frac{A\cdot K_x}{m\cdot n_{gas.tot}}\cdot\left(x_A(t) - \frac{y_A(t)}{m}\right) = \frac{1}{m\cdot n_{gas.tot}}\cdot A\cdot K_x\cdot\delta_A(t)$$

$$\frac{d}{dt}\delta_A(t) = -\left[\left(\frac{1}{n_{liq.tot}} + \frac{1}{m\cdot n_{gas.tot}}\right)\cdot A\cdot K_x\right]\cdot\delta_A(t)$$

$$\tau := \left[\left(\frac{1}{n_{liq.tot}} + \frac{1}{m\cdot n_{gas.tot}}\right)\cdot A\cdot K_x\right]^{-1} = 4.588\cdot hr \qquad \tau = 1.652\times 10^{4}\,s$$

$$\delta_A(t) := \delta_{A0}\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad t° := -\tau\cdot\ln\left(\frac{1}{10}\right) = 3.803\times 10^{4}\,s \qquad t° = 10.565\cdot hr$$