Principi di Ingegneria Chimica
Anno Accademico 2013-2014

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Problema 1. Una lamina di spessore $2L$ e conducibilità termica k è sede di generazione termica volumetrica funzione della temperatura $G = a + bT$. La lamina è allo stato stazionario e le pareti sono tenute alla temperatura costante T_w.

1. Scrivere il bilancio microscopico di energia nella lamina, con le necessarie condizioni al contorno (considerando l'asse x lungo lo spessore della lamina e ponendo l'origine dell'asse sul piano mediano della lamina);
2. Risolvere l'equazione di bilancio microscopico(*), ottenendo il profilo di temperatura lungo lo spessore della lamina;
3. Calcolare la temperatura massima che si registra nella lamina.

(*) **Suggerimento**. Per l'equazione differenziale ordinaria $\{d^2y/dx^2 + \alpha y = -\beta\}$, la soluzione particolare è $\{y_p = -\beta/\alpha\}$ e la soluzione dell'omogenea associata è $\{y_c = C_1 sin(\sqrt{\alpha}x) + C_2 cos(\sqrt{\alpha}x)\}$.

Dati. $a = 10^5$ W/m^3, $b = 920$ W/(m^3·K), $L = 1$ cm, $T_w = 20$°C, $k = 0.5$ W/(m·K).

Problema 2. Un serbatoio cilindrico di diametro D ed altezza totale H_T è chiuso e inizialmente è pieno fino a un livello H_0 di acqua, mentre la parte superiore è piena di aria (gas ideale), a pressione atmosferica. Il sistema è isotermo a temperatura T. All'istante zero sul fondo del serbatoio si apre un foro di diametro d.

1. Calcolare l'evoluzione della pressione dell'aria al variare della posizione del pelo libero dell'acqua nel serbatoio;
2. Calcolare la posizione di equilibrio del pelo libero dell'acqua nel serbatoio e il corrispondente valore della pressione dell'aria;
3. Proporre un modello per descrivere l'evoluzione della posizione del pelo libero dell'acqua nel tempo, stimare la velocità di uscita dell'acqua dal serbatoio in funzione della posizione del pelo libero dell'acqua nel serbatoio.

Dati. $H_T = 5$ m, $H_0 = 2$ m, $T = 25$°C.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Problema 1. Una lamina di spessore $2L$ e conducibilità termica k è sede di generazione termica volumetrica funzione della temperatura $G = a + bT$. La lamina è allo stato stazionario e le pareti sono tenute alla temperatura costante T_w.

1. Scrivere il bilancio microscopico di energia nella lamina, con le necessarie condizioni al contorno (considerando l'asse x lungo lo spessore della lamina e ponendo l'origine dell'asse sul piano mediano della lamina);
2. Risolvere l'equazione di bilancio microscopico(*), ottenendo il profilo di temperatura lungo lo spessore della lamina;
3. Calcolare la temperatura massima che si registra nella lamina.

(*) **Suggerimento**. Per l'equazione differenziale ordinaria $\{d^2y/dx^2 + \alpha y = -\beta\}$, la soluzione particolare è $\{y_p = -\beta/\alpha\}$ e la soluzione dell'omogenea associata è $\{y_c = C_1 sin(\sqrt{\alpha}x) + C_2 cos(\sqrt{\alpha}x)\}$.

Dati. $a = 10^5$ W/m³, $b = 920$ W/(m³·K), $L = 1$ cm, $T_w = 20$°C, $k = 0.5$ W/(m·K).

$$a := 10^5 \cdot \frac{W}{m^3} \qquad b := 920 \cdot \frac{W}{m^3 \cdot K} \qquad L := 1 \cdot cm \qquad T_w := 20\,°C \qquad k := 0.5 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$$

1. Bilancio differenziale

$$0 = -\frac{d}{dx}q + (a + b \cdot T) \qquad 0 = k \cdot \frac{d^2}{dx^2}T + (a + b \cdot T)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}T + \frac{b}{k} \cdot T = -\frac{a}{k}$$

BC1 $\quad x = 0 \quad \frac{d}{dx}T = 0 \qquad$ BC2 $\quad x = L \quad T = T_w$

2. Soluzione della ODE

$$T_p = -\frac{a}{b} \qquad \text{infatti} \qquad \frac{d^2}{dx^2}T_p = 0 \qquad \frac{b}{k} \cdot T_p = \frac{b}{k} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{k}$$

$$T_c = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)$$

$$T = T_p + T_c = -\frac{a}{b} + C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)$$

$$\frac{d}{dx}T = C_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{k}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right) - C_2 \cdot \sqrt{\frac{b}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)$$

per la BC1

$$0 = C_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{k}} \cdot \cos(0) - C_2 \cdot \sqrt{\frac{b}{k}} \cdot \sin(0) \qquad ==> \qquad C_1 = 0$$

quindi

$$T = -\frac{a}{b} + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)$$

per la BC2

$$T_w = -\frac{a}{b} + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot L\right) \qquad ==> \qquad C_2 = \frac{T_w + \frac{a}{b}}{\cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot L\right)}$$

$$T(x) := -\frac{a}{b} + \left(T_w + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot L\right)} \qquad \text{e anche} \qquad \frac{d}{dx}T = -\left(\frac{T_w + \frac{a}{b}}{\cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot L\right)}\right) \cdot \sqrt{\frac{b}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot x\right)$$

Il massimo si registra al centro, dove $\sin(0) = 0$ e quindi $\frac{d}{dx}T = 0$

sostituendo x=0 in T(x) viene cos (0) =1 e si trova uguale l'espressione

$$T(0) = 60.033 \cdot °C$$

$$T_{max} := -\frac{a}{b} + \left(T_w + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{b}{k}} \cdot L\right)} = 60.033 \cdot °C$$

Problema 2. Un serbatoio cilindrico di diametro D ed altezza totale H_T è chiuso e inizialmente è pieno fino a un livello H_0 di acqua, mentre la parte superiore è piena di aria (gas ideale), a pressione atmosferica. Il sistema è isotermo a temperatura T. All'istante zero sul fondo del serbatoio si apre un foro di diametro d.

1. Calcolare l'evoluzione della pressione dell'aria al variare della posizione del pelo libero dell'acqua nel serbatoio;
2. Calcolare la posizione di equilibrio del pelo libero dell'acqua nel serbatoio e il corrispondente valore della pressione dell'aria;
3. Proporre un modello per descrivere l'evoluzione della posizione del pelo libero dell'acqua nel tempo, stimare la velocità di uscita dell'acqua dal serbatoio in funzione della posizione del pelo libero dell'acqua nel serbatoio.

Dati. $H_T = 5$ m, $H_0 = 2$ m, $T = 25°$C.

$P_2 := 1\cdot atm$ $\quad P_{A0} := 1\cdot atm$ $\quad H_T := 5\cdot m$ $\quad H_0 := 2\cdot m$ $\quad T := 25\,°C$ $\quad \rho := \rho_w(T) = 997.278\,\frac{kg}{m^3}$

1. Per la pressione dell'aria durante lo svuotamento

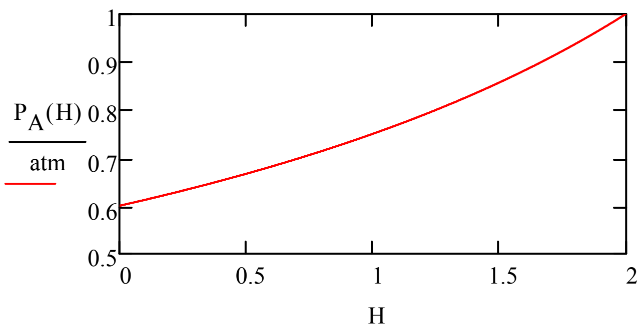
$$P_A \cdot V_A = n\cdot R\cdot T = costante = P_A(H)\cdot V_A(H)$$

H è l'altezza del pelo libero dell'**acqua** nel serbatoio

$$P_{A0}\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot(H_T - H_0) = P_A(H)\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot(H_T - H)$$

$H := 0\cdot m, 1\cdot mm .. H_0$

$$P_A(H) := P_{A0}\cdot\frac{(H_T - H_0)}{(H_T - H)}$$



2. All'equilibrio, bilancio di energia meccanica tra il pelo libero dell'acqua (fermo, sezione 1) e la sezione di uscita (sezione 2, dove l'acqua all'equilibrio è comunque ferma)

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\cdot h_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g\cdot h_2$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = g\cdot(h_1 - h_2) = g\cdot H$$ P_1 è la pressione dell'aria

$H := 1\cdot m$ $\quad$ Given $\quad \frac{P_2 - P_A(H)}{\rho} = g\cdot H$

$H_{eq} := Minerr(H) = 1.494\,m$

$P_A(H_{eq}) = 0.856\cdot atm$

$H := 1\cdot m$ $\quad$ Given $\quad H^2\cdot\rho\cdot g - H\cdot(P_{A0} + \rho\cdot g\cdot H_T) + P_{A0}\cdot H_0 = 0$

$H_{eq} := Minerr(H) = 1.494\,m$ $\quad P_A(H_{eq}) = 0.856\cdot atm$ $\quad$ Sara

3. Modello per lo svuotamento

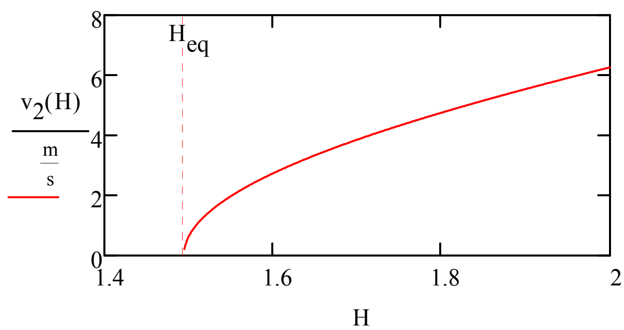
$$\rho\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot\frac{d}{dt}H(t) = -\rho\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot v_2(H)$$

$H(t = 0) = H_0$ $\quad H := 0\cdot m, 1\cdot mm .. H_0$

con v.2(H) data dal bilancio di energia meccanica tra 1 e 2

$$\frac{P_A(H)}{\rho} + g\cdot H = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2(H) := \sqrt{2\cdot\left(g\cdot H - \frac{P_2 - P_A(H)}{\rho}\right)}$$



$v_2(H_0) = 6.263\,\frac{m}{s}$