Cognome	Nome	Matricola	Firma

Problema 1. Un contenitore perfettamente adiabatico contiene un volume V_w di acqua ben agitata e alla temperatura iniziale T_{w0}. Al tempo 0 nel contenitore viene introdotta una sferetta metallica (proprietà k, ρ, $\hat{C}_P$) di diametro D e di temperatura iniziale T_{s0}. A causa dell'interazione tra sferetta e liquido si stabilisce un coefficiente di scambio termico convettivo h.

1. Calcolare la temperatura comune di stato stazionario per il sistema acqua+sfera, T_{ss};
2. Determinare se il transitorio di scambio termico vada trattato a parametri distribuiti o a parametri concentrati. Calcolare dopo quanto tempo la differenza di temperatura tra la superficie della sfera e l'acqua si dimezza rispetto al suo valore iniziale.
3. Calcolare dopo quanto tempo la differenza tra la temperatura attuale dell'acqua e il suo valore iniziale assume un valore pari al 90% della differenza tra la temperatura di stato stazionario e la temperatura iniziale dell'acqua.

Assumere i parametri fisici dell'acqua costanti e uguali ai loro valori iniziali.

Dati. $\rho = 7000$ kg/m³, $k = 45$ W/(m·K), $\hat{C}_P = 3000$ J/(kg·K), $D = 3$ cm, $V_w = 500$ mL, $T_{w0} = 20$°C, $T_{s0} = 90$°C, $h = 80$ W/(m²·K).

Problema 2. Una pompa viene utilizzata per far circolare acqua alla temperatura media T_m in un circuito chiuso, costituito da un tubo a sezione circolare, di diametro interno D_1, spessore s, conducibilità termica k, rugosità relativa ε/D, e lunghezza totale L_{tot}. Lungo il circuito ci sono quattro curve a 90° e una caldaia con coefficiente di perdita di carico e_v in cui la temperatura dell'acqua viene portata fino a T_{H0}, e per un tratto di lunghezza L_s il tubo è concentrico ad un altro tubo di diametro interno D_2. Nell'intercapedine, in controcorrente all'acqua calda, circola una portata $\dot{m}_C$ di acqua fredda che nella sezione di ingresso ha temperatura T_{C0}. Se la pompa assorbe dalla rete una potenza P ed ha una efficienza η, calcolare:

1. La portata massica di acqua calda che fluisce nel circuito;
2. Il coefficiente globale di scambio (riferito al diametro D_1) tra l'acqua calda e l'acqua fredda (considerare tutti i parametri fisici dell'acqua costanti sui loro valori presi alla temperatura media);
3. Le temperature di uscita dell'acqua dal lato dell'acqua calda (tubo interno) e dal lato dell'acqua fredda (tubo esterno).

Dati. $T_m = 50$°C, $D_1 = 2.5$ cm, $s = 0.1$ cm, $k = 200$ W/(m·K), $\varepsilon/D = 0.002$, $L_{tot} = 20$ m, $e_v = 10$, $T_{H0} = 60$°C, $L_s = 6$ m, $D_2 = 5$ cm, $\dot{m}_C = 4$ kg/s, $T_{C0} = 10$°C, $P = 60$ W, $\eta = 80\%$.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Problema 1 Un contenitore perfettamente adiabatico è contiene un volume V_w di acqua ben agitata e alla temperatura iniziale T_{w0}. Al tempo 0 nel contenitore viene introdotta una sferetta metallica (proprietà k, ρ, $\hat{C}_P$) di diametro D e di temperatura iniziale T_{s0}. A causa dell'agitazione tra sferetta e liquido si stabilisce un coefficiente di scambio termico convettivo h.

1. Calcolare la temperatura comune di stato stazionario per il sistema acqua+sfera, T_{ss};
2. Determinare se il transitorio di scambio termico vada trattato a parametri distribuiti o a parametri concentrati. Calcolare dopo quanto tempo la differenza di temperatura tra la superficie della sfera e l'acqua si dimezza rispetto al suo valore iniziale.
3. Calcolare dopo quanto tempo la differenza tra la temperatura attuale dell'acqua e il suo valore iniziale assume un valore pari al 90% della differenza tra la temperatura di stato stazionario e la temperatura iniziale dell'acqua.

Assumere i parametri fisici dell'acqua costanti e uguali ai loro valori iniziali.

Dati. $\rho = 7000\ \mathrm{kg/m^3}$, $k = 45\ \mathrm{W/(m{\cdot}K)}$, $\hat{C}_P = 3000\ \mathrm{J/(kg{\cdot}K)}$, $D = 3\ \mathrm{cm}$, $V_w = 500\ \mathrm{mL}$, $T_{w0} = 20°\mathrm{C}$, $T_{s0} = 90°\mathrm{C}$, $h = 80\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$.

$\rho_s := 7000\cdot\frac{kg}{m^3}$ $\quad k_s := 45\cdot\frac{W}{m\cdot K}$ $\quad C_{P.s} := 3000\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$ $\quad D := 3cm$ $\quad V_w := 500\cdot mL$ $\quad T_{w0} := 20\,°C$ $\quad T_{s0} := 90\,°C$ $\quad h := 80\cdot\frac{W}{m^2\cdot K}$

$\rho_{w1} := \rho_w(T_{w0}) = 998.028\,\frac{kg}{m^3}$ $\quad C_{P.w1} := C_{P.w}(T_{w0}) = 4.184\times10^3\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$ $\quad V_s := \frac{\pi\cdot D^3}{6} = 14.137\cdot mL$

Punto 1. Energia iniziale = energia finale

$$\rho_s\cdot C_{P.s}\cdot V_s\cdot(T_{s0}-T_{rif}) + \rho_w\cdot C_{P.w}\cdot V_w\cdot(T_{w0}-T_{rif}) = \rho_s\cdot C_{P.s}\cdot V_s\cdot(T_{ss}-T_{rif}) + \rho_w\cdot C_{P.w}\cdot V_w\cdot(T_{ss}-T_{rif})$$

$T_{ss} := \frac{(\rho_s\cdot C_{P.s}\cdot V_s\cdot T_{s0} + \rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w\cdot T_{w0})}{(\rho_s\cdot C_{P.s}\cdot V_s + \rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w)} = 28.715\cdot°C$ $\quad T_{ss} = 28.715\cdot°C$ $\quad T_{ss} = 301.865\ K$

Punto 2. Numero di Biot per la sfera $\quad N_{Bi} := \frac{h}{k_s}\cdot\frac{D}{2} = 0.027$ $\quad$ Parametri concentrati

Bilancio di energia sulla sfera $\quad \rho_s\cdot C_{P.s}\cdot\frac{\pi\cdot D^3}{6}\cdot\left(\frac{d}{dt}T_s(t)\right) = -h\cdot\pi\cdot D^2\cdot(T_s(t) - T_w(t))$ $\quad$ IC $\quad T_s(t=0) = T_{s0}$

Bilancio di energia sull'acqua $\quad \rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w\cdot\left(\frac{d}{dt}T_w(t)\right) = h\cdot\pi\cdot D^2\cdot(T_s(t) - T_w(t))$ $\quad$ IC $\quad T_w(t=0) = T_{w0}$

Sottraendo membro a membro $\quad \frac{d}{dt}(T_s(t) - T_w(t)) = -h\cdot\pi\cdot D^2\cdot\left[\frac{1}{\left(\rho_s\cdot C_{P.s}\cdot\frac{\pi\cdot D^3}{6}\right)} + \frac{1}{(\rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w)}\right]\cdot(T_s(t) - T_w(t))$

Definendo $\quad \delta(t) = (T_s(t) - T_w(t))$ $\quad$ e $\quad \tau := \left[h\cdot\pi\cdot D^2\cdot\left[\frac{1}{\left(\rho_s\cdot C_{P.s}\cdot\frac{\pi\cdot D^3}{6}\right)} + \frac{1}{(\rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w)}\right]\right]^{-1} = 1.149\times10^3\,s$

$\delta_0 := T_{s0} - T_{w0}$

L'equazione diventa $\frac{d}{dt}\delta(t) = -\frac{1}{\tau}\cdot\delta(t)$ IC $\delta(t=0) = \delta_0$

Integrando $\ln\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = \frac{-t}{\tau}$ $\delta(t) := \delta_0\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Il tempo perché δ dimezzi è: $t_{0.5} := -\tau\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 796.496\,s$ $t_{0.5} = 13.275\cdot min$

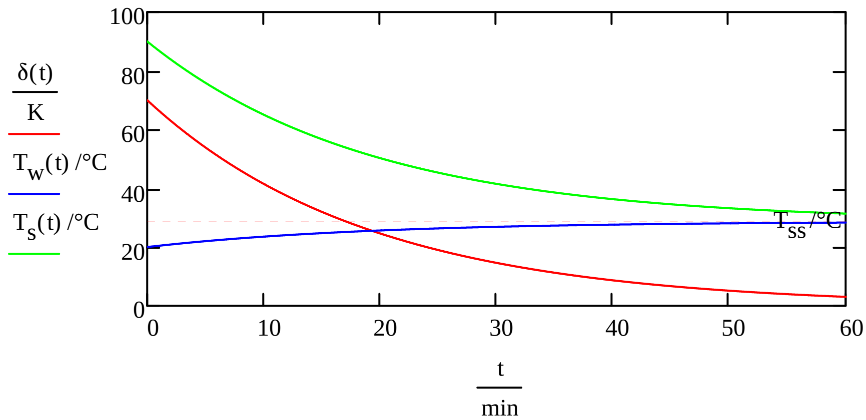
Punto 3. Torniamo al bilancio sull'acqua

$\frac{d}{dt}T_w(t) = \frac{h\cdot\pi\cdot D^2}{\rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w}\cdot\left(T_s(t) - T_w(t)\right)$ definendo $\tau_w := \left(\frac{h\cdot\pi\cdot D^2}{\rho_{w1}\cdot C_{P.w1}\cdot V_w}\right)^{-1} = 9.23\times10^3\,s$ si ha

$\frac{d}{dt}T_w(t) = \frac{\delta_0}{\tau_w}\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ separando le variabili ed integrando $T_w(t) - T_{w0} = \frac{\delta_0}{\tau_w}\cdot\int_0^t \exp\left(-\frac{t°}{\tau}\right)dt° = \delta_0\cdot\frac{\tau}{\tau_w}\cdot\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

$T_w(t) := T_{w0} + \delta_0\cdot\frac{\tau}{\tau_w}\cdot\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ (A)

$t := 0, 1\cdot s .. 1\cdot hr$ $T_s(t) := T_w(t) + \delta(t)$



$T_w(t°) - T_{w0} = \frac{90}{100}\cdot\left(T_{ss} - T_{w0}\right)$ $T_{w°} = T_w(t°)$ $T_{w°} := T_{w0} + \frac{90}{100}\cdot\left(T_{ss} - T_{w0}\right) = 27.843\cdot°C$

sostituend T.w° nell'eq. (A) $\left(T_{w°} - T_{w0}\right)\cdot\frac{\tau_w}{\delta_0\cdot\tau} = 1 - \exp\left(-\frac{t°}{\tau}\right)$

$t° := -\tau\cdot\ln\left[1 - \left(T_{w°} - T_{w0}\right)\cdot\frac{\tau_w}{\delta_0\cdot\tau}\right] = 2.646\times10^3\,s$ $t° = 44.098\cdot min$

Problema 2. Una pompa viene utilizzata per far circolare acqua alla temperatura media T_m in un circuito chiuso, costituito da un tubo a sezione circolare, di diametro interno D_1, spessore s, conducibilità termica k, rugosità relativa ε/D, e lunghezza totale L_{tot}. Lungo il circuito ci sono quattro curve a 90° e una caldaia con coefficiente di perdita di carico e_v in cui la temperatura dell'acqua viene portata fino a T_{H0}, e per un tratto di lunghezza L_s il tubo è concentrico ad un altro tubo di diametro interno D_2. Nell'intercapedine, in controcorrente all'acqua calda, circola una portata $\dot{m}_C$ di acqua fredda che nella sezione di ingresso ha temperatura T_{C0}. Se la pompa assorbe dalla rete una potenza P ed ha una efficienza η, calcolare:

1. La portata massica di acqua calda che fluisce nel circuito;
2. Il coefficiente globale di scambio (riferito al diametro D_1) tra l'acqua calda e l'acqua fredda (considerare tutti i parametri fisici dell'acqua costanti sui loro valori presi alla temperatura media);
3. Le temperature di uscita dell'acqua dal lato dell'acqua calda (tubo interno) e dal lato dell'acqua fredda (tubo esterno).

Dati $T_m = 50°C$, $D_1 = 2.5$ cm, $s = 0.1$ cm, $k = 200$ W/(m·K), $\varepsilon/D = 0.002$, $L_{tot} = 20$ m, $e_v = 10$, $T_{H0} = 60°C$, $L_s = 6$ m, $D_2 = 5$ cm, $\dot{m}_C = 4$ kg/s, $T_{C0} = 10°C$, $P = 60$ W, $\eta = 80\%$.

$D_1 := 2.5 \cdot cm \quad s_t := 0.1cm \quad k := 200 \cdot \frac{W}{m \cdot K} \quad \varepsilon\_D := 0.002 \quad L_{tot} := 20 \cdot m \quad e_{v.caldaia} := 10 \quad T_{H0} := 60\,°C$

$T_m := 50\,°C \quad D_2 := 5 \cdot cm \quad m_{pC} := 4 \cdot \frac{kg}{s} \quad P := 60 \cdot W \quad \eta := 80\% \quad L_s := 6 \cdot m \quad e_{v.curve} := 4 \cdot 0.6 \quad T_{C0} := 10\,°C$

$\rho_{w2} := \rho_w(T_m) = 987.582 \frac{kg}{m^3} \quad C_{P.w2} := C_{P.w}(T_m) = 4.178 \times 10^3 \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \quad \mu_{w2} := \mu_w(T_m) = 5.544 \times 10^{-4} \frac{kg}{m \cdot s}$

$\Sigma e_v := e_{v.caldaia} + e_{v.curve} = 12.4 \quad k_{w2} := k_w(T_m) = 0.64 \frac{W}{m \cdot K}$

Punto 1. Bilancio di energia meccanica sul circuito chiuso: la potenza fornita dalla pompa serve a vincere le perdite per attrito

$$W = P \cdot \eta = m_p \cdot E_v = \left(\rho_{w2} \cdot v \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4}\right) \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{v \cdot D_1 \cdot \rho_{w2}}{\mu_{w2}}, \varepsilon\_D\right) \cdot \frac{L_{tot}}{D_1} + \Sigma e_v\right) \qquad \text{(A)}$$

L'eq. (A) è una eq. nell'unica incognita v

$v := 1 \cdot \frac{m}{s}$ Given

valore di tentativo

$$P \cdot \eta = \left(\rho_{w2} \cdot v \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4}\right) \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{v \cdot D_1 \cdot \rho_{w2}}{\mu_{w2}}, \varepsilon\_D\right) \cdot \frac{L_{tot}}{D_1} + \Sigma e_v\right) \qquad v := \text{Minerr}(v) = 2.439 \frac{m}{s}$$

$$N_{Re.H} := \frac{v \cdot D_1 \cdot \rho_{w2}}{\mu_{w2}} = 1.086 \times 10^5 \qquad f(N_{Re.H}, \varepsilon\_D) = 6.206 \times 10^{-3}$$

$$m_{pH} := \rho_{w2} \cdot v \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 1.183 \frac{kg}{s}$$

Punto 2. Calcolo del coefficiente globale di scambio

$N_{Pr} := N_{Pr.w}(T_m) = 3.621$

Nel tubo

$$N_{Nu.H} := (0.026)\cdot N_{Re.H}^{(0.8)}\cdot N_{Pr}^{(0.33)} = 424.778 \qquad h_H := \frac{N_{Nu.H}\cdot k_{w2}}{D_1} = 1.088\times 10^4\,\frac{W}{m^2\cdot K}$$

Nell'intercapedine

$$R_h := \frac{\frac{\pi}{4}\cdot\left[D_2^{\,2} - \left(D_1 + s_t\right)^2\right]}{\pi\cdot\left[D_2 + \left(D_1 + s_t\right)\right]} = 6\times 10^{-3}\,m \qquad v_C := \frac{m_{pC}}{\rho_{w2}\cdot\left[\frac{\pi}{4}\cdot\left[D_2^{\,2} - \left(D_1 + s_t\right)^2\right]\right]} = 2.827\,\frac{m}{s}$$

$$N_{Re.C} := \frac{v_C\cdot 4\cdot R_h\cdot\rho_{w2}}{\mu_{w2}} = 1.209\times 10^5$$

$$N_{Nu.C} := (0.026)\cdot N_{Re.C}^{(0.8)}\cdot N_{Pr}^{(0.33)} = 462.64 \qquad h_C := \frac{N_{Nu.C}\cdot k_{w2}}{4\cdot R_h} = 1.235\times 10^4\,\frac{W}{m^2\cdot K}$$

Trascurando la conduzione (tubo metallico sottile)

$$U := \left(\frac{1}{h_H} + \frac{1}{h_C}\right)^{-1} = 5.784\times 10^3\,\frac{W}{m^2\cdot K}$$

Tenendo conto della conduzione, il coefficiente riferito al diametro D.1 sarebbe stato:

$$U_1 := \frac{1}{\frac{D_1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{D_1}{2}\cdot h_H} + \ln\left(\frac{D_1 + s_t}{D_1}\right)\cdot\frac{1}{k} + \frac{1}{\frac{D_1 + s_t}{2}\cdot h_C}\right)} = 5.806\times 10^3\,\frac{W}{m^2\cdot K}$$

Punto 3. Temperature di uscita (scambiatore in controcorrente di area nota)

Equazione di bilancio $\quad Q = m_{pH}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{H0} - T_{H1}\right) = m_{pC}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{C1} - T_{C0}\right)$

Equazione di trasporto $\quad Q = \pi\cdot\left(D_1 + s\right)L_s\cdot U\cdot\Delta T_{ml} = \pi\cdot\left(D_1 + s_t\right)L_s\cdot U\cdot\dfrac{\left(T_{C1} - T_{C0}\right) - \left(T_{H1} - T_{H0}\right)}{\ln\left(\dfrac{T_{C1} - T_{C0}}{T_{H1} - T_{H0}}\right)}$

Due equazioni nelle due incognite $\quad T_{H1}$ e T_{C1}

Valori di tentativo $\quad T_{C1} := T_m \qquad T_{H1} := T_m \qquad T_{H0} = 60\,°C \qquad T_{C0} = 10\,°C$

Given

$$m_{pH}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{H0} - T_{H1}\right) = m_{pC}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{C1} - T_{C0}\right)$$

$$m_{pH}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{H0} - T_{H1}\right) = \pi\cdot\left(D_1 + s_t\right)L_s\cdot U\cdot\frac{\left(T_{H0} - T_{C1}\right) - \left(T_{H1} - T_{C0}\right)}{\ln\left(\dfrac{T_{H0} - T_{C1}}{T_{H1} - T_{C0}}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} T_{C1} \\ T_{H1} \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}\left(T_{C1}, T_{H1}\right) = \begin{pmatrix} 16.123 \\ 39.291 \end{pmatrix}°C$$

$$m_{pH}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{H0} - T_{H1}\right) = 1.023\times 10^5\,W \qquad m_{pC}\cdot C_{P.w2}\cdot\left(T_{C1} - T_{C0}\right) = 1.023\times 10^5\,W$$

$$\Delta T_{ml} := \frac{\left(T_{H0} - T_{C1}\right) - \left(T_{H1} - T_{C0}\right)}{\ln\left(\dfrac{T_{H0} - T_{C1}}{T_{H1} - T_{C0}}\right)} = 36.094\,K$$

Oppure in alternativa:

Da questa: $m_{pH} \cdot C_{P.w2} \cdot (T_{H0} - T_{H1}) = m_{pC} \cdot C_{P.w2} \cdot (T_{C1} - T_{C0})$

Si ricava $T_{C1} = \dfrac{T_{C0} \cdot m_{pC} + T_{H0} \cdot m_{pH} - T_{H1} \cdot m_{pH}}{m_{pC}}$

Si sostituisce nell'altra

$$m_{pH} \cdot C_{P.w2} \cdot (T_{H0} - T_{H1}) = \pi \cdot (D_1 + s_t) L_s \cdot U \cdot \frac{\left(T_{H0} - \dfrac{T_{C0} \cdot m_{pC} + T_{H0} \cdot m_{pH} - T_{H1} \cdot m_{pH}}{m_{pC}}\right) - (T_{H1} - T_{C0})}{\ln\left(\dfrac{T_{H0} - \dfrac{T_{C0} \cdot m_{pC} + T_{H0} \cdot m_{pH} - T_{H1} \cdot m_{pH}}{m_{pC}}}{T_{H1} - T_{C0}}\right)}$$

Diventa una equazione nella sola incognita T.H1, da risolvere per tentativi

$T_{H1} := T_m$ Given

$$C_{P.w2} \cdot m_{pH} \cdot (T_{H0} - T_{H1}) = \frac{\pi \cdot L_s \cdot U \cdot (T_{H0} - T_{H1}) \cdot (m_{pC} - m_{pH}) \cdot (D_1 + s_t)}{m_{pC} \cdot \ln\left(\dfrac{T_{C0} \cdot m_{pC} - T_{H0} \cdot m_{pC} + T_{H0} \cdot m_{pH} - T_{H1} \cdot m_{pH}}{T_{C0} \cdot m_{pC} - T_{H1} \cdot m_{pC}}\right)}$$

$T_{H1} := \text{Minerr}(T_{H1}) = 39.291\ °C$

$$T_{C1} := \frac{T_{C0} \cdot m_{pC} + T_{H0} \cdot m_{pH} - T_{H1} \cdot m_{pH}}{m_{pC}} = 16.123\ °C$$