Principi di Ingegneria Chimica
Anno Accademico 2012-2013

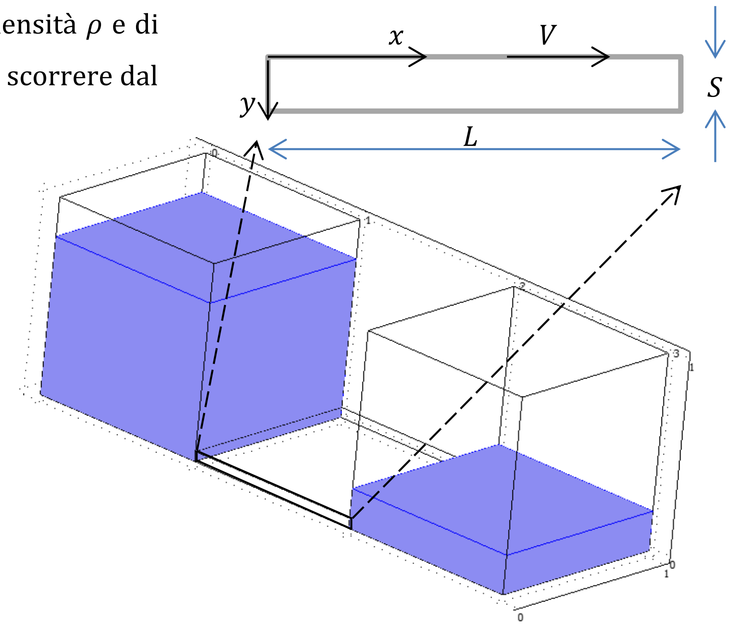
Cognome	Nome	Matricola	Firma

Problema 1. Una lastra quadrata di un solido con caratteristiche fisiche costanti (densità ρ_S, conducibilità k_S, calore specifico $\hat{C}_{P,S}$), di lato L e spessore s, è investita da ambo i lati da aria a temperatura T_∞ e con velocità v_∞. La lastra è sede di generazione termica e la sua temperatura media di parete è T_w, il sistema è allo stato stazionario. Calcolare:

1. Il coefficiente di scambio termico medio tra la lastra e l'aria, h_{av};
2. Il valore (chiarendo il senso fisico del segno) del termine di generazione termica volumetrica nella lastra, G;
3. La temperatura nel piano di simmetria (al centro) della lastra, T_c.

Dati. $\rho_S = 2000$ kg/m³, $k_S = 0.15$ W/(m·K), $\hat{C}_{P,S} = 1250$ kJ/(kg·K), $L = 1.0$ m, $s = 8$ mm, $T_\infty = 20$ °C, $v_\infty = 34$ m/s, $T_w = 5$ °C.

Problema 2. Due serbatoi cubici di lato W sono connessi mediante una sottile fenditura, larga W, lunga L e spessa S, all'altezza dei due fondi come in figura. Inizialmente, nel serbatoio 1 c'è un battente H_{10} e nel serbatoio 2 un battente H_{20} di un liquido di densità ρ e di viscosità μ. Al tempo zero il liquido comincia a scorrere dal serbatoio 1 al serbatoio 2, per effetto della differenza di pressione e a causa del fatto che la superficie superiore della fenditura si muove (nel verso dal serbatoio 1 al serbatoio 2, cioè verso destra nel disegno), con velocità V.



1. Determinare i profili di velocità e di sforzo nella fenditura;
2. Determinare l'espressione della portata in funzione del gradiente di pressione e calcolare il valore iniziale della portata;
3. Calcolare dopo quanto tempo nei due serbatoi si raggiunge lo stesso livello di liquido e disegnare il profilo di velocità in quel momento.

Dati. $W = 1$ m, $L = 1$ m, $S = 0.05$ m, $H_{10} = 0.8$ m, $H_{20} = 0.1$ m, $\rho = 1200$ kg/m³, $\mu = 10$ Pa·s; $V = 0.2$ m/s.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Problema 1. Una lastra quadrata di un solido con caratteristiche fisiche costanti (densità ρ_S, conducibilità k_S, calore specifico $\hat{C}_{P,S}$), di lato L e spessore s, è investita da ambo i lati da aria a temperatura T_∞ e con velocità v_∞. La lastra è sede di generazione termica e la sua temperatura media di parete è T_w, il sistema è allo stato stazionario. Calcolare:

1. Il coefficiente di scambio termico medio tra la lastra e l'aria, h_{av};
2. Il valore (chiarendo il senso fisico del segno) del termine di generazione termica volumetrica nella lastra, G;
3. La temperatura nel piano di simmetria (al centro) della lastra, T_c.

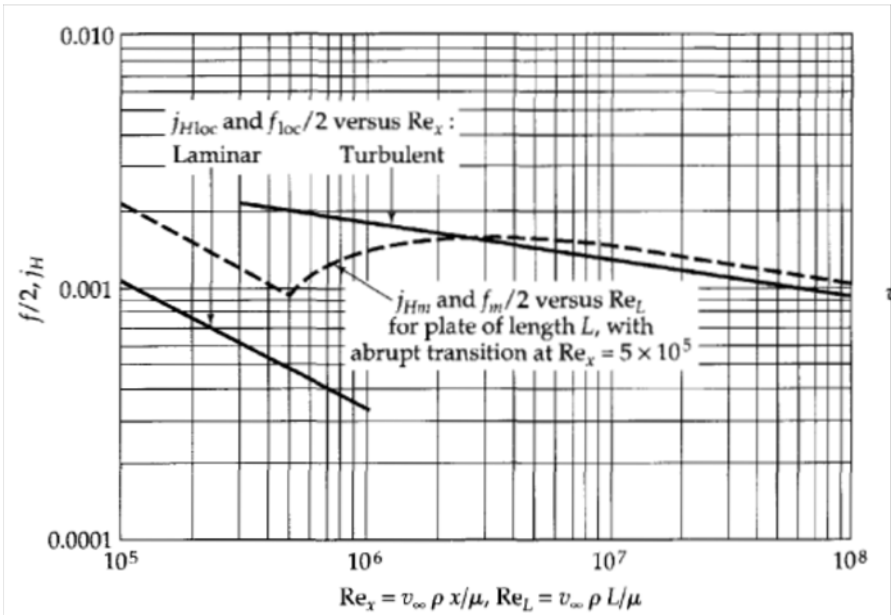
Dati. $\rho_S = 2000$ kg/m³, $k_S = 0.15$ W/(m·K), $\hat{C}_{P,S} = 1250$ kJ/(kg·K), $L = 1.0$ m, $s = 8$ mm, $T_\infty = 20$ °C, $v_\infty = 34$ m/s, $T_w = 5$ °C.

$\rho_S := 2000\frac{kg}{m^3}$ $\quad k_S := 0.15\frac{W}{m\cdot K}$ $\quad C_{P.S} := 1250\frac{kJ}{kg\cdot K}$ $\quad L := 1\cdot m$ $\quad S := 8\cdot mm$ $\quad T_{inf} := 20°C$

$v_{inf} := 34\cdot\frac{m}{s}$ $\quad T_w := 5°C$

Questa correlazione equivale al grafico per j.av

$$j_H(N_{Re}, N_{Pr}) := 0.664 N_{Re}^{-0.5} + \text{if}\left[5\cdot 10^5 < N_{Re} < 1\cdot 10^8, \left[1 - \left(\frac{5\cdot 10^5}{N_{Re}}\right)^{0.8}\right]\cdot 0.036\left(\frac{1}{N_{Re}^{0.2}}\right)\cdot N_{Pr}^{0.1}, 0\right]$$



$$T_f := \frac{T_{inf} + T_w}{2} = 12.5°C$$

$$N_{Re} := \frac{v_{inf}\cdot L\cdot\rho_A(T_f)}{\mu_A(T_f)} = 2.379\times 10^6$$

$$N_{Pr} := N_{Pr.A}(T_f) = 0.715$$

$$j := j_H(N_{Re}, N_{Pr}) = 1.747\times 10^{-3}$$

$$N_{Nu} := j\cdot N_{Re}\cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} = 3.717\times 10^3$$

$$h := \frac{N_{Nu}\cdot k_A(T_f)}{L} = 92.898\cdot\frac{W}{m^2\cdot K}$$

La portata che ENTRA nella lastra è: $\quad Q := (2\cdot L^2)\cdot h\cdot(T_{inf} - T_w) = 2.787\ kW$

Allo stato stazionario 0 = IN + GEN da cui GEN = - IN $\quad G := \frac{-Q}{L^2\cdot S} = -348.368\frac{kW}{m^3}$

Bilancio microscopico di calore (x è la direzione lungo lo spessore della lastra)

$0 = \frac{d}{dx}q + G$ $\quad q = -G\cdot x + C_1$ $\quad$ essendo (BC1) ad x = 0 il flusso nullo (simmetria) si ha $\quad C_1 = 0$

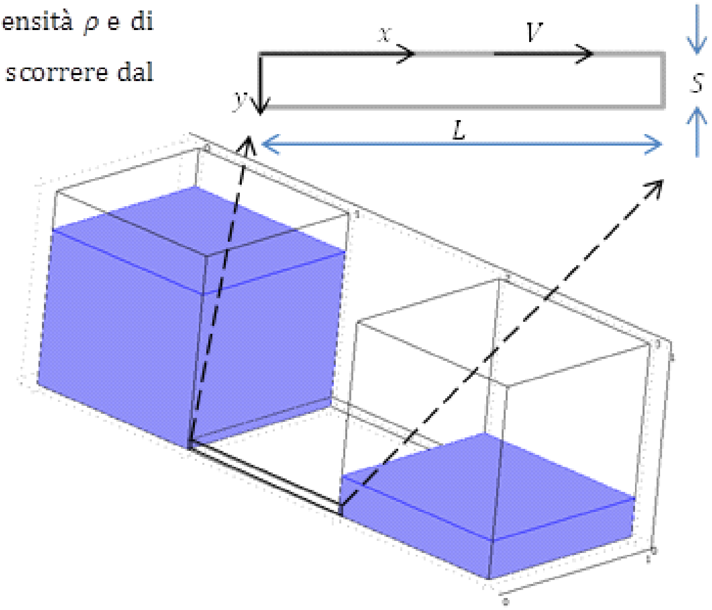
Introducendo Fourier $k_S \cdot \frac{d}{dx} T = -G \cdot x$ da cui $T = -\frac{G}{2 \cdot k_S} \cdot x^2 + C_2$

essendo (BC2) ad x = S/2 (sulla superficie), T = T.W si ha $T_W = C_2 - \frac{G}{2 \cdot k_S} \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^2$ da cui $C_2 = T_2 + \frac{G}{2 \cdot k_S} \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^2$

quindi il profilo di temperatura risulta $T(x) := T_W + \frac{G}{2 \cdot k_S} \cdot \left[\left(\frac{S}{2}\right)^2 - x^2\right]$

e all'asse si ha $T(0) = -13.58\ °C$

Problema 2. Due serbatoi cubici di lato W sono connessi mediante una sottile fenditura, larga W, lunga L e spessa S, all'altezza dei due fondi come in figura. Inizialmente, nel serbatoio 1 c'è un battente H_{10} e nel serbatoio 2 un battente H_{20} di un liquido di densità ρ e di viscosità μ. Al tempo zero il liquido comincia a scorrere dal serbatoio 1 al serbatoio 2, per effetto della differenza di pressione e a causa del fatto che la superficie superiore della fenditura si muove (nel verso dal serbatoio 1 al serbatoio 2, cioè verso destra nel disegno), con velocità V.



1. Determinare i profili di velocità e di sforzo nella fenditura;
2. Determinare l'espressione della portata in funzione del gradiente di pressione e calcolare il valore iniziale della portata;
3. Calcolare dopo quanto tempo nei due serbatoi si raggiunge lo stesso livello di liquido e disegnare il profilo di velocità in quel momento.

Dati. $W = 1$ m, $L = 1$ m, $S = 0.05$ m, $H_{10} = 0.8$ m, $H_{20} = 0.1$ m, $\rho = 1200$ kg/m³, $\mu = 10$ Pa·s; $V = 0.2$ m/s.

$W := 1 \cdot m \quad L := 1 \cdot m \quad S := 0.05 \cdot m \quad H_{10} := 0.8 \cdot m \quad H_{20} := 0.1 \cdot m \quad \rho := 1200 \cdot \frac{kg}{m^3} \quad \mu := 10 \cdot Pa \cdot s \quad V := 0.2 \cdot \frac{m}{s}$

Bilancio della componente x della quantità di moto nella fenditura (stato stazionario) $\frac{d}{dy} \tau_{xy} = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \qquad \tau_{xy} = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot y + C_1$

Non sappiamo scrivere condizioni al contorno sullo sforzo, per cui introduciamo Newton e integriamo di nuovo $\mu \cdot \frac{d}{dy} v_x = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot y + C_1$

$$v_x = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \left(\frac{-y^2}{2 \cdot \mu}\right) + \frac{C_1}{\mu} \cdot y + C_2$$

Condizioni al contorno BC1 @ x=0 $v_x = V$ da cui $C_2 = V$

BC2 @ x=S $v_x = 0$ da cui $0 = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \left(\frac{-S^2}{2 \cdot \mu}\right) + \frac{C_1}{\mu} \cdot S + V$

$$C_1 = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \frac{S}{2} - \frac{V \cdot \mu}{S}$$

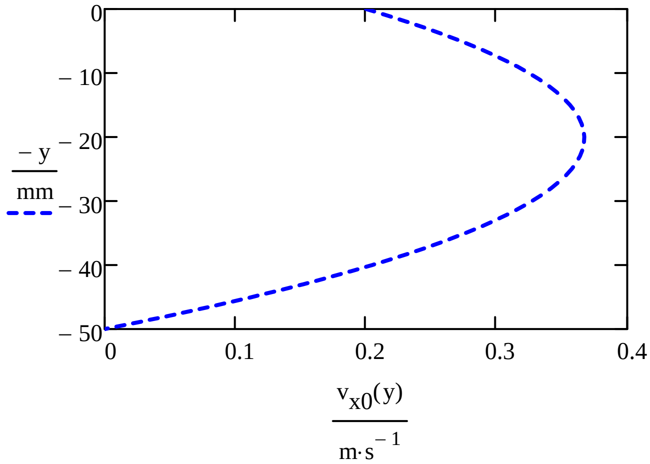
e infine $v_x(y) = \left(\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu} \left(S \cdot y - y^2\right) + V \cdot \left(1 - \frac{y}{S}\right)$

al tempo 0 la pressione sul fondo del recipiente 1 vale $P_{10} = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H_{10}$ e sul fondo del recipiente 2 $P_{20} = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H_{20}$

quindi il gradiente di pressione iniziale $-\Delta P_0 = P_{10} - P_{20} = \rho \cdot g \cdot (H_{10} - H_{20})$ ovvero $\Delta P_0 := \rho \cdot g \cdot (H_{20} - H_{10}) = -8.238 \times 10^3 \, Pa$

$$v_{x0}(y) := \left[\left(-\frac{\Delta P_0}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu}\left(S \cdot y - y^2\right) + V \cdot \left(1 - \frac{y}{S}\right)\right]$$

$y := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. S$ Profilo iniziale di velocità



Calcolo della portata volumetrica

$$V_p = \int v_x \, dS = \int_0^W \left(\int_0^S v_x(y) \, dy\right) dz = W \cdot \int_0^S v_x(y) \, dy = W \cdot \int_0^S \left[\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu}\left(S \cdot y - y^2\right) + V \cdot \left(1 - \frac{y}{S}\right)\right] dy$$

$$V_p = W \cdot \left[\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu}\right] \cdot \int_0^S \left(S \cdot y - y^2\right) dy + W \cdot V \cdot \int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right) dy$$

essendo $\int_0^S \left(S \cdot y - y^2\right) dy = \frac{S^3}{6}$ $\int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right) dy = \frac{S}{2}$

si ha $V_p = W \cdot \left[\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu}\right] \cdot \frac{S^3}{6} + W \cdot V \cdot \frac{S}{2}$

il valore iniziale della portata volumetrica è $V_{p0} := W \cdot \left[\left(-\frac{\Delta P_0}{L}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \mu}\right] \cdot \frac{S^3}{6} + W \cdot V \cdot \frac{S}{2} = 0.014 \, \frac{m^3}{s}$

Evoluzione dei peli liberi nei due serbatoi

$\alpha := \frac{W}{L}\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{S^3}{6} = 1.042\times10^{-6}\,\frac{m^4\cdot s}{kg}$ $\quad\beta := W\cdot V\cdot\frac{S}{2} = 5\times10^{-3}\,\frac{m^3}{s}$ $\quad V_{p0} := \alpha\cdot(-\Delta P_0) + \beta = 0.014\,\frac{m^3}{s}$

$\Delta P_0 := \rho\cdot g\cdot(H_{20} - H_{10}) = -8.238\times10^3\,Pa$

$\alpha_1 := -\alpha\cdot\rho\cdot g = -0.012\,\frac{m^2}{s}$

$V_{p0} := \alpha_1\cdot(H_{20} - H_{10}) + \beta = 0.014\,\frac{m^3}{s}$

quindi la portata volumetrica si può anche scrivere in funzione della differenza di quota dei peli liberi come

$$V_p = \alpha_1\cdot(H_2 - H_1) + \beta \qquad (A)$$

Bilancio di materia sul serbatoio 1 $\quad \rho\cdot W^2\cdot\frac{d}{dt}H_1(t) = -\rho\cdot V_p$ $\quad$ ovvero $\quad \frac{d}{dt}H_1(t) = -\frac{V_p}{W^2}$ $\quad$ (B)

Bilancio di materia sul serbatoio 2 $\quad \rho\cdot W^2\cdot\frac{d}{dt}H_2(t) = \rho\cdot V_p$ $\quad$ ovvero $\quad \frac{d}{dt}H_2(t) = \frac{V_p}{W^2}$ $\quad$ (C)

Sottraendo (B) da (C) e poi introducendo la (A)

$$\frac{d}{dt}(H_2 - H_1) = \frac{2}{W^2}\cdot V_p = \frac{2}{W^2}\cdot\left[\alpha_1\cdot(H_2 - H_1) + \beta\right]$$

Definendo $\quad \delta = H_2 - H_1$

$$\frac{d}{dt}\delta = \frac{2}{W^2}\cdot(\alpha_1\cdot\delta + \beta) = \frac{2\cdot\alpha_1}{W^2}\cdot\left(\delta + \frac{\beta}{\alpha_1}\right)$$

con la condizione iniziale $\quad \delta(t = 0) = \delta_0 = H_{20} - H_{10} \qquad \delta_0 := H_{20} - H_{10} = -0.7\,m$

integrando

$$\ln\left(\frac{\delta + \frac{\beta}{\alpha_1}}{\delta_0 + \frac{\beta}{\alpha_1}}\right) = \frac{2\cdot\alpha_1}{W^2}\cdot t$$

il tempo necessario affinché i due livelli si eguaglino (δ = 0):

$$t° := \frac{W^2}{2\cdot\alpha_1}\cdot\ln\left(\frac{\frac{\beta}{\alpha_1}}{\delta_0 + \frac{\beta}{\alpha_1}}\right) = 40.757\,s$$

quando i due livelli sono uguali $\quad \Delta P := 0 \quad$ quindi il profilo di velocità diventa (in blu il profilo iniziale)

$$v_x(y) := \left[\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\mu}\left(S\cdot y - y^2\right) + V\cdot\left(1 - \frac{y}{S}\right)\right]$$