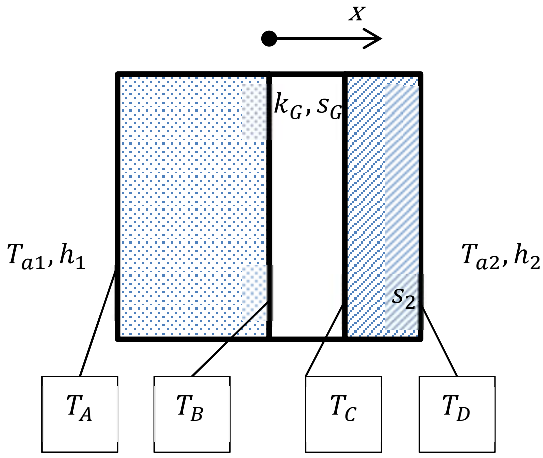
Cognome	Nome	Matricola	Firma

Problema 1. Una lamina di spessore s_G e conducibilità k_G è sede di generazione di calore, G. La lamina, di area laterale A, è ricoperta da un lato da uno spessore s_1 di un isolante di conducibilità k_1, e dall'altro lato da uno spessore s_2 di un isolante di conducibilità k_2, e questo triplo strato separa due ambienti, rispettivamente a temperatura T_{a1} e T_{a2}, ognuno sede di convezione con coefficienti h_1 e h_2. Determinare:

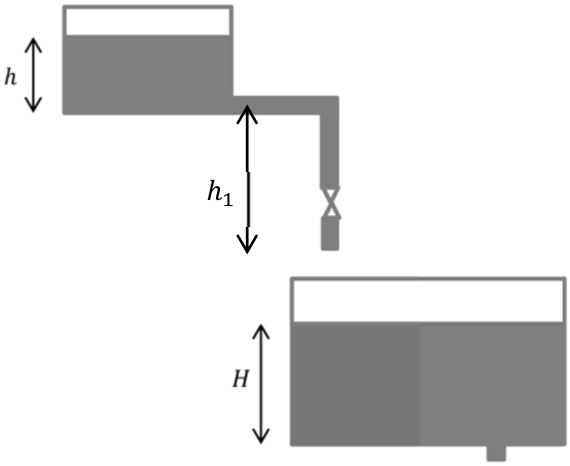
1. Il profilo di temperatura e di flusso termico nella lamina,
2. Le temperature delle interfacce (nel disegno: T_A, T_B, T_C e T_D),
3. Sapendo che la lamina fonde alla temperatura T_m, determinare se nelle condizioni descritte si verifica fusione e in quale zona della lamina stessa.



Dati. $s_G = 5$ cm, $k_G = 0.1$ W/(m·K), $G = 3{\cdot}10^3$ W/m^3, $s_1 = 10$ cm, $k_1 = 0.5$ W/(m·K), $s_2 = 5$ cm, $k_2 = 0.1$ W/(m·K), $T_{a1} = 20$°C, $h_1 = 10$ W/(m^2·K), $T_{a2} = 25$°C, $h_2 = 20$ W/(m^2·K), $T_m = 62$°C.

Problema 2. Un liquido di densità ρ e di viscosità μ passa da un piccolo serbatoio di diametro D_1, in cui è mantenuto un livello h costante, attraverso un tubo di lunghezza totale L, diametro d e rugosità k/d, in un serbatoio più grande, di diametro D_2 e inizialmente vuoto. Lungo la tubazione c'è una curva a 90° e una valvola a saracinesca aperta. Lo sbocco del tubo è a una quota h_1 più in basso rispetto al fondo del serbatoio piccolo. Calcolare:

1. La portata massica di liquido che va dal serbatoio piccolo a quello grande.



Sul fondo del serbatoio grande c'è un foro di diametro d.

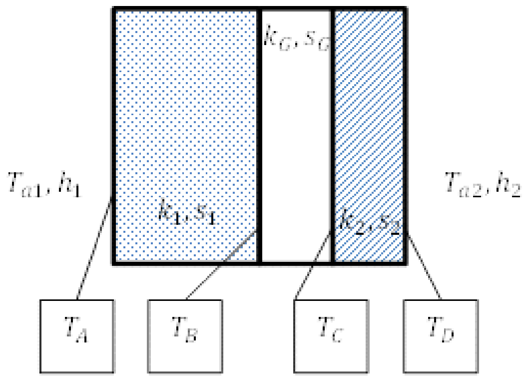
2. Calcolare l'altezza del battente che si stabilisce nel serbatoio grande a regime, H.
3. Proporre il modello per descrivere l'evoluzione del battente di liquido nel serbatoio grande. Calcolare l'altezza del battente dopo un tempo t^* dall'inizio del travaso.

Dati. $\rho = 1200$ kg/m^3, $\mu = 0.002$ kg/(m·s), $h = 2$ m, $L = 15$ m, $d = 2.5$ cm, $k/d = 0.001$, $h_1 = 3$ m, $t^* = 10$ min.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Problema 1. Una lamina di spessore s_G e conducibilità k_G è sede di generazione di calore, G. La lamina, di area laterale A, è ricoperta da un lato da uno spessore s_1 di un isolante di conducibilità k_1, e dall'altro lato da uno spessore s_2 di un isolante di conducibilità k_2, e questo triplo strato separa due ambienti, rispettivamente a temperatura T_{a1} e T_{a2}, ognuno sede di convezione con coefficienti h_1 e h_2. Determinare:

1. Il profilo di temperatura e di flusso termico nella lamina,
2. Le temperature delle interfacce (nel disegno: T_A, T_B, T_C e T_D),
3. Sapendo che la lamina fonde alla temperatura T_m, determinare se nelle condizioni descritte si verifica fusione e in quale punto della lamina stessa.



Dati. $s_G = 5$ cm, $k_G = 0.1$ W/(m·K), $G = 3{\cdot}10^3$ W/m³, $s_1 = 10$ cm, $k_1 = 0.5$ W/(m·K), $s_2 = 5$ cm, $k_2 = 0.1$ W/(m·K), $T_{a1} = 20$°C, $h_1 = 10$ W/(m²·K), $T_{a2} = 25$°C, $h_2 = 20$ W/(m²·K).

$k_1 := 0.5 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ $\quad h_1 := 10 \cdot \frac{W}{m^2 K}$ $\quad k_2 := 0.1 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ $\quad h_2 := 20 \cdot \frac{W}{m^2 K}$ $\quad k_G := 0.1 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ $\quad G := 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{W}{m^3}$

$s_1 := 10 \cdot cm$ $\quad T_{a1} := 20\,°C$ $\quad s_2 := 5 \cdot cm$ $\quad T_{a2} := 25\,°C$ $\quad s_G := 5 \cdot cm$ $\quad T_m := 62\,°C$

$$U_1 := \left(\frac{s_1}{k_1} + \frac{1}{h_1}\right)^{-1} = 3.333 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K} \qquad U_2 := \left(\frac{s_2}{k_2} + \frac{1}{h_2}\right)^{-1} = 1.818 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Domanda 1

Profilo di temperatura $\quad T(x) = T_B + (T_C - T_B) \cdot \frac{x}{s_G} + \frac{G}{2 \cdot k_G} \cdot \left(x \cdot s_G - x^2\right)$ $\quad$ dal bilancio microscopico

Profilo di flusso termico $\quad q_x(x) = \frac{G \cdot (s_G - 2 \cdot x)}{2} - \frac{T_B - T_C}{s_G} \cdot k_G$

Il flusso termico ha un massimo per $\quad q_x(x°) = \frac{G \cdot (s_G - 2 \cdot x°)}{2} - \frac{T_B - T_C}{s_G} \cdot k_G = 0 \qquad x° = \frac{G \cdot s_G^{\,2} - 2 \cdot T_B \cdot k_G + 2 \cdot T_C \cdot k_G}{2 \cdot G \cdot s_G}$

Domanda 2

Per determinare le temperature intermedie si deve risolvere il sistema

$G \cdot s_G = q_1 + q_2$ $\quad$ (A) bilancio di energia macroscopico sulla lamina

$q_1 = U_1 \cdot (T_B - T_{a1})$ $\quad$ (B) flusso dalla lamina verso l'ambiente 1

$q_2 = U_2 \cdot (T_C - T_{a2})$ $\quad$ (C) flusso dalla lamina verso l'ambiente 2

$q_1 = \frac{G \cdot s_G}{2} + (T_C - T_B) \cdot \frac{k}{s_G}$ $\quad$ (D) flusso valutato a x = 0 cioè l'interfaccia tra la lamina e l'isolante 1

Ricavo q.2 da (A) e sostituisco in (C)

$$q_1 = U_1\cdot(T_B - T_{a1}) \qquad \text{(A)}$$

$$G\cdot s_G - q_1 = U_2\cdot(T_C - T_{a2}) \qquad \text{(B')}$$

$$q_1 = \frac{G\cdot s_G}{2} + (T_C - T_B)\cdot\frac{k}{s_G} \qquad \text{(C)}$$

Sostituisco (A) nelle altre 2

$$G\cdot s_G - U_1\cdot(T_B - T_{a1}) = U_2\cdot(T_C - T_{a2}) \qquad \text{(B'')}$$

$$U_1\cdot(T_B - T_{a1}) = \frac{G\cdot s_G}{2} + (T_C - T_B)\cdot\frac{k_G}{s_G} \qquad \text{(C')}$$

E' un sistema di due equazioni nelle due incognite T.B e T.C

valori di primo tentativo $T_B := 30\,°C$ $\quad T_C := 30\,°C$

Given $\quad G\cdot s_G - U_1\cdot(T_B - T_{a1}) = U_2\cdot(T_C - T_{a2})$

$$U_1\cdot(T_B - T_{a1}) = \frac{G\cdot s_G}{2} + (T_C - T_B)\cdot\frac{k_G}{s_G} \qquad \begin{pmatrix} T_B \\ T_C \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(T_B, T_C) = \begin{pmatrix} 47.778 \\ 56.574 \end{pmatrix}\cdot°C$$

Soluzione analitica

$$T_B := \frac{T_{a1}\cdot U_1 + G\cdot\left(\frac{s_G}{2} + \frac{k_G}{U_2}\right) + \frac{k_G}{s_G}\cdot\left(T_{a1}\cdot\frac{U_1}{U_2} + T_{a2}\right)}{U_1 + \frac{k_G}{s_G}\cdot\left(\frac{U_1}{U_2} + 1\right)} = 47.778\cdot°C$$

$$T_C := (T_{a1} - T_B)\cdot\frac{U_1}{U_2} + T_{a2} + \frac{G\cdot s_G}{U_2} = 56.574\cdot°C$$

$$q_1 := \frac{G\cdot s_G}{2} + (T_C - T_B)\cdot\frac{k_G}{s_G} = 92.593\cdot\frac{W}{m^2} \qquad q_2 := U_2\cdot(T_C - T_{a2}) = 57.407\cdot\frac{W}{m^2}$$

$$T_A := T_B - \frac{q_1}{\frac{k_1}{s_1}} = 29.259\cdot°C \qquad T_D := T_C - \frac{q_2}{\frac{k_2}{s_2}} = 27.87\cdot°C$$

Profili di temperatura e flusso termico

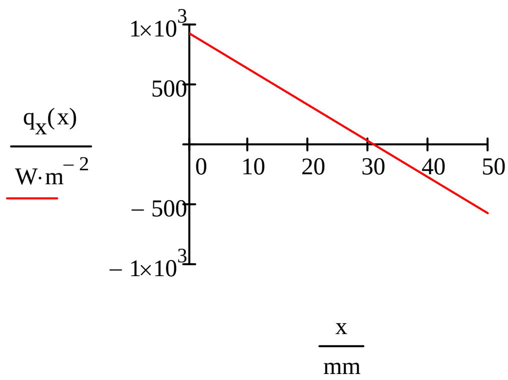
$$T(x) := T_B + (T_C - T_B)\cdot\frac{x}{s_G} + \frac{G}{2\cdot k_G}\cdot\left(x\cdot s_G - x^2\right) \qquad q_x(x) := \frac{G\cdot(s_G - 2\cdot x)}{2\cdot k_G} - \frac{T_B - T_C}{s_G}$$

Posizione e valore del massimo di temperatura

$$x° := \frac{G\cdot s_G^{\,2} - 2\cdot T_B\cdot k_G + 2\cdot T_C\cdot k_G}{2\cdot G\cdot s_G} = 30.864\cdot mm \qquad T(x°) = 62.067\cdot °C$$

$x := 0\cdot mm, 0.1\cdot mm .. s_G$

C'è fusione, in corrispondenza del massimo di temperatura



$T_A = 29.259\cdot °C$

$T_B = 47.778\cdot °C$

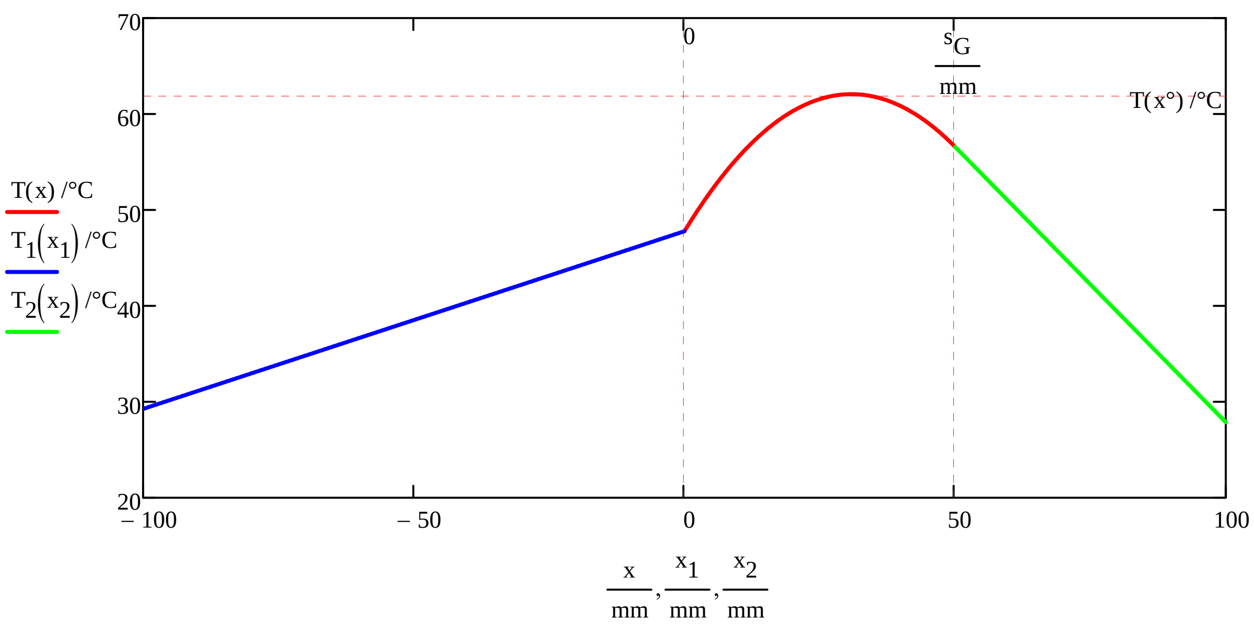
$T_C = 56.574\cdot °C$

$T_D = 27.87\cdot °C$

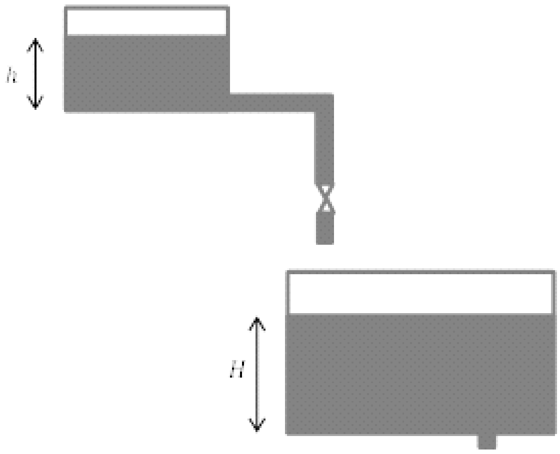
$T(x°) = 62.067\cdot °C$

$x_1 := -s_1, -s_1 + 0.1\cdot mm .. 0\cdot mm \qquad x_2 := s_G, s_G + 0.1\cdot mm .. s_G + s_2$

$$T_1(x) := T_B - \frac{|x|}{k_1}\cdot q_1 \qquad T_2(x) := -\left[(x - s_G)\cdot\frac{q_2}{k_2}\right] + T_C$$



Problema 2. Un liquido di densità ρ e di viscosità μ passa da un piccolo serbatoio di diametro D_1, in cui è mantenuto un livello h costante, attraverso un tubo di lunghezza totale L, diametro d e rugosità k/d, in un serbatoio più grande, di diametro D_2 e inizialmente vuoto. Lungo la tubazione c'è una curva a 90° e una valvola a saracinesca aperta. Lo sbocco del tubo è a una quota h_1 più in basso rispetto al fondo del serbatoio piccolo. Calcolare:



1. La portata massica di liquido che va dal serbatoio piccolo a quello grande.

Sul fondo del serbatoio grande c'è un foro di diametro d.

2. Calcolare l'altezza del battente che si stabilisce nel serbatoio grande a regime, H.
3. Proporre il modello per descrivere l'evoluzione del battente di liquido nel serbatoio grande. Calcolare l'altezza del battente dopo un tempo t^* dall'inizio del travaso.

Dati. $\rho = 1200\ \mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 0.002\ \mathrm{kg/(m \cdot s)}$, $h = 2\ \mathrm{m}$, $L = 15\ \mathrm{m}$, $d = 2.5\ \mathrm{cm}$, $k/d = 0.001$, $h_1 = 3\ \mathrm{m}$, $t^* = 10\ \mathrm{min}$.

$\rho := 1200\dfrac{kg}{m^3}$ $\quad \mu := 0.002\cdot\dfrac{kg}{m\cdot s}$ $\quad h := 2\cdot m$ $\quad d := 5\cdot cm$ $\quad L := 15\cdot m$ $\quad k\_d := 0.001$ $\quad h_1 := 3\cdot m$ $\quad D_2 := 2\cdot m$

Bilancio di EM 1-2 (1 = pelo libero serbatoio superiore, 2 = sbocco del tubo)

$$\frac{v_1^2}{2} + g\cdot h_{10} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + g\cdot h_{20} + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_t^2}{2}\cdot\left(4f\cdot\frac{L}{d} + \Sigma e_v\right) \qquad v_1 = v_2 = 0 \qquad P_1 = P_2 \qquad \Delta h = h_{10} - h_{20} = h + h_1$$

$\Delta h := h + h_1 = 5\,m$ $\qquad \Sigma e_v := 1 + 0.45 + 0.5 + 0.2 = 2.15$ $\qquad$ sbocco + imbocco + curva + valvola

$v_t := 1\cdot\dfrac{m}{s}$ valore di primo tentativo $\qquad$ Given $\qquad g\cdot\Delta h = \dfrac{v_t^2}{2}\cdot\left(4\,f\left(\dfrac{v_t\cdot d\cdot\rho}{\mu}, k\_d\right)\cdot\dfrac{L}{d} + \Sigma e_v\right)$ $\qquad v_t := \mathrm{Minerr}(v_t) = 3.352\,\dfrac{m}{s}$

$N_{Re} := \dfrac{v_t\cdot d\cdot\rho}{\mu} = 1.006\times 10^5$ $\qquad f\left(\dfrac{v_t\cdot d\cdot\rho}{\mu}, k\_d\right) = 5.482\times 10^{-3}$ $\qquad mp := \dfrac{\pi\, d^2}{4}\cdot\rho\cdot v_t = 7.898\,\dfrac{kg}{s}$

Bilancio di EM 3-4 (3 = pelo libero del serbatoio inferiore, 4 = uscita dal foro sul fondo)

$$\frac{v_3^2}{2} + g\cdot h_3 + \frac{P_3}{\rho} = \frac{v_4^2}{2} + g\cdot h_4 + \frac{P_4}{\rho}$$

$v_3 = 0 \qquad v_4 = v_t$

$P_3 = P_4 \qquad h_3 = H \qquad h_4 = 0 \qquad g\cdot H = \dfrac{v_t^2}{2} \qquad H := \dfrac{v_t^2}{2\cdot g} = 0.573\,m$

Bilancio di materia sul serbatoio grande

$$\rho\cdot\frac{\pi\cdot D_2^{\,2}}{4}\cdot\frac{d}{dt}H(t) = \frac{\pi\, d^2}{4}\cdot\rho\cdot v_t - \rho\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot v_{out} \qquad v_{out} = \sqrt{2\cdot g\cdot H(t)} \qquad H_0 := 0\cdot m$$

$$\frac{d}{dt}H(t) = \left(\frac{d}{D_2}\right)^2\cdot v_t - \left(\frac{d}{D_2}\right)^2\cdot\sqrt{2\cdot g}\cdot H(t)^{0.5} = A - B\cdot\sqrt{H(t)}$$

$$A := \left(\frac{d}{D_2}\right)^2\cdot v_t = 2.095\times 10^{-3}\,\frac{m}{s} \qquad B := \left(\frac{d}{D_2}\right)^2\cdot\sqrt{2\cdot g} = 2.768\times 10^{-3}\,\frac{m^{0.5}}{s}$$

$$\int_{H_0}^{H}\frac{1}{A - B\cdot\sqrt{H}}\,dH = -\frac{2\cdot\left[A\cdot\ln\left(\frac{A - B\cdot\sqrt{H}}{A - B\cdot\sqrt{H_0}}\right) + B\cdot\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right)\right]}{B^2}$$

$$t(H) := -\frac{2\cdot\left[A\cdot\ln\left(\frac{A - B\cdot\sqrt{H}}{A - B\cdot\sqrt{H_0}}\right) + B\cdot\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right)\right]}{B^2}$$

$$t^\circ := 10\cdot min \qquad H^\circ := 0.2\cdot m$$

$$H^\circ := \mathrm{root}(t(H^\circ) - t^\circ, H^\circ) = 0.422\,m$$

$$t(H^\circ) = 10\cdot min$$