Cognome	Nome	Matricola	Firma

Problema 1. Una lastrina di cloruro di sodio (di massa molecolare M_A, solubilità Sol e densità ρ), a base quadrata di lato L e di spessore iniziale S_0, è immersa in un volume ben agitato V di una soluzione di cloruro di sodio, a concentrazione iniziale C_{A0} e a temperatura T. In prossimità della lastra l'agitazione produce un numero di Reynolds medio N_{REL} (quindi si tratta di una lastra investita da un fluido in movimento). La diffusività del cloruro di sodio in acqua sia D_{AW}. Calcolare:

1. Il flusso iniziale di cloruro di sodio tra lastra e soluzione salina, chiarendone il verso;
2. La concentrazione di cloruro di sodio nella soluzione dopo un tempo $t°$;
3. Lo spessore della lastra dopo un tempo $t°$.

Dati. $M_A = 58.5$ g/mol, $Sol = 320$ kg/m³, $\rho = 2200$ kg/m³, $L = 3$ cm, $S_0 = 2$ mm, $V = 0.5$ litri,
$C_{A0} = 6000$ mol/m³, $T = 25$°C, $N_{REL} = 2 \cdot 10^5$, $D_{AW} = 0.12 \cdot 10^{-9}$ m²/s, $t° = 5$ ore.

Problema 2. Una sferetta metallica di diametro D, densità apparente ρ_S, calore specifico C e temperatura iniziale T_0, è sede di una reazione chimica esotermica. Tale reazione dà luogo ad un termine di generazione volumetrico descritto dalla legge temporale $G(t) = (G_0 - G_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + G_\infty$. La sferetta è investita dal basso da una corrente di acqua a temperatura T_a, e con velocità tale da mantenere la sfera ferma nella sua posizione verticale. Calcolare:

1. La velocità dell'acqua diretta verso l'alto,
2. La portata iniziale di calore scambiata tra la sferetta e l'acqua, chiarendone il verso.

Poi, supponendo che il coefficiente di scambio termico sia indipendente dalla temperatura e pari al suo valore iniziale,

3. Calcolare la temperatura di stato stazionario della sfera,
4. Proporre una equazione per descrivere l'evoluzione temporale della temperatura della sfera.

Dati. $D = 2$ cm, $\rho_S = 2000$ kg/m³, $C = 2.5$ kJ/kg·K, $T_0 = 20$°C, $G_0 = 10$ MW/m³, $G_\infty = 30$ MW/m³, $\tau = 600$ s,
$T_a = 10$°C.

Problema 1. Una lastrina di cloruro di sodio (di massa molecolare M_A, solubilità *Sol* e densità ρ), a base quadrata di lato L e di spessore iniziale S_0, è immersa in un volume ben agitato V di una soluzione di cloruro di sodio, a concentrazione iniziale C_{A0} e a temperatura T. In prossimità della lastra l'agitazione produce un numero di Reynolds medio N_{REL} (quindi si tratta di una lastra investita da un fluido in movimento). La diffusività del cloruro di sodio in acqua sia D_{AW}. Calcolare:

1. Il flusso iniziale di cloruro di sodio tra lastra e soluzione salina, chiarendone il verso;
2. La concentrazione di cloruro di sodio nella soluzione dopo un tempo $t°$;
3. Lo spessore della lastra dopo un tempo $t°$.

Dati. M_A = 58.5 g/mol, Sol = 320 kg/m³, ρ = 2200 kg/m³, L = 3 cm, S_0 = 2 mm, V = 0.5 litri, C_{A0} = 6000 mol/m³, T = 25°C, $N_{REL} = 2\cdot10^5$, $D_{AW} = 0.12\cdot10^{-9}$ m²/s, $t°$ = 5 ore.

$M_A := 58.5\,\frac{gm}{mol}$ $\quad Sol := 320\cdot\frac{kg}{m^3}$ $\quad \rho := 2200\cdot\frac{kg}{m^3}$ $\quad L := 3\cdot cm$ $\quad S_0 := 2\cdot mm$ $\quad V := 0.5\cdot liter$

$C_{A0} := 6000\cdot\frac{mol}{m^3}$ $\quad N_{Re.L} := 2\cdot10^5$ $\quad t° := 5\cdot hr$ $\quad D_{AW} := 0.12\cdot10^{-9}\cdot\frac{m^2}{s}$ $\quad T := 25\,°C$

$N_{Sc} := \frac{\nu_w(T)}{D_{AW}} = 7.611\times10^3$

Dal grafico di pag. 419

$j_D := 0.0015$ $\quad j_D\cdot N_{Re.L}\cdot N_{Sc}^{0.33} = 5.728\times10^3$

$\nu_w(T) = 9.133\times10^{-7}\cdot m^2\cdot s^{-1}$

Dalla correlazione 13.3-5 x 2

$N_{Sh} := 2\cdot0.332\cdot(N_{Re.L})^{0.5}\cdot N_{Sc}^{0.33} = 5.67\times10^3$

$C_{A.sat} := \frac{Sol}{M_A} = 5.47\times10^3\,\frac{mol}{m^3}$ $\quad k_c := N_{Sh}\cdot\frac{D_{AW}}{L} = 2.268\times10^{-5}\,\frac{m}{s}$ $\quad N_{A0} := k_c\cdot(C_{A0} - C_{A.sat}) = 0.012\,\frac{mol}{m^2\cdot s}$

Il flusso è dalla soluzione verso la lastra

Bilancio di materia sulla fase liquida

$$V\cdot\left(\frac{d}{dt}C_A(t)\right) = -k_c\cdot L^2\cdot(C_A(t) - C_{A.sat}) \qquad C_A(0) = C_{A0}$$

$\tau := \frac{V}{k_c\cdot L^2} = 2.45\times10^4\,s$

$$C_A(t) := C_{A.sat} + (C_{A0} - C_{A.sat})\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad C_A(t°) = 5.724\times10^3\,\frac{mol}{m^3}$$

Bilancio di materia sulla lastra

$$\frac{\rho\cdot L^2}{M_A}\cdot\left(\frac{d}{dt}S(t)\right) = k_c\cdot L^2\cdot(C_A(t) - C_{A.sat}) \qquad S(0) = S_0$$

$C_1 := \frac{k_c\cdot M_A}{\rho} = 6.03\times10^{-10}\,\frac{m^4}{mol\cdot s}$

$$S(t) := S_0 + C_1\cdot\int_0^t (C_{A0} - C_{A.sat})\cdot\exp\left(-\frac{\eta}{\tau}\right)d\eta \qquad S(t°) = 6.074\cdot mm$$

$$S(t) := S_0 + C_1\cdot(C_{A0} - C_{A.sat})\cdot\tau\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad S(t°) = 6.074\cdot mm$$

Problema 2. Una sferetta metallica di diametro *D*, densità apparente ρ_S calore specifico *C* e temperatura iniziale T_0, è sede di una reazione chimica che produce calore dando luogo ad un termine di generazione volumetrico descritto dalla legge temporale $G(t) = (G_0 - G_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + G_\infty$. La sferetta è investita dal basso da una corrente di acqua a temperatura T_a e con velocità tale da mantenere la sfera ferma nella sua posizione verticale. Calcolare:

1. La velocità dell'acqua diretta verso l'alto,
2. La portata iniziale di calore scambiata tra la sferetta e l'acqua, chiarendone il verso.

Poi, supponendo che il coefficiente di scambio termico sia indipendente dalla temperatura e pari al suo valore iniziale,

3. Calcolare la temperatura di stato stazionario della sfera,
4. Proporre una equazione per descrivere l'evoluzione temporale della temperatura della sfera.

Dati. $D = 2$ cm, $\rho_S = 2000$ kg/m³, $C = 2.5$ kJ/kg·K, $T_0 = 20$°C, $G_0 = 10$ MW/m³, $G_\infty = 30$ MW/m³, $\tau = 600$ s, $T_a = 10$°C.

$D := 2\text{cm} \qquad \rho_s := 2000\cdot\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad T_0 := 20\,°\text{C} \qquad G_0 := 10\cdot\frac{\text{MW}}{\text{m}^3} \qquad G_{inf} := 30\cdot\frac{\text{MW}}{\text{m}^3} \qquad \tau := 600\cdot\text{s} \qquad T_a := 10\,°\text{C}$

$$f(N_{Re}) := \text{if}\left[N_{Re} < 0.1, \frac{24}{N_{Re}}, \text{if}\left[N_{Re} < 6000, \left(\sqrt{\frac{24}{N_{Re}}} + 0.5407\right)^2, \text{if}\left(N_{Re} < 10^5, 0.44, 0.2\right)\right]\right]$$

$$T_{f0} := \frac{T_a + T_0}{2}$$

$$C_p := 2.5\cdot\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

$$G(t) := G_{inf} + (G_0 - G_{inf})\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$C := \frac{D}{\nu_w(T_{f0})}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}\cdot D\cdot g\cdot\frac{\rho_s - \rho_w(T_{f0})}{\rho_w(T_{f0})}} = 8.509\times 10^3$$

$$f_1(N_{Re}) := C^2\cdot N_{Re}^{-2}$$

$x := -2, -1.99 .. 6$

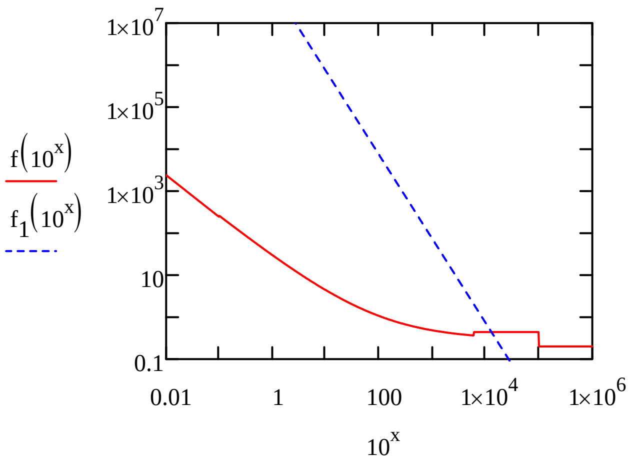
$N_{Re} := 100$

Given

$f_1(N_{Re}) = f(N_{Re})$

$N_{Re} := \text{Minerr}(N_{Re}) = 1.277\times 10^4$

$f(N_{Re}) = 0.44$



$$v_{inf} := \frac{N_{Re}\cdot\mu_w(T_{f0})}{D\cdot\rho_w(T_{f0})} = 0.769\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Correlazione 13.3-1 p. 417 vecchia edizione

$$N_{Nu} := 2 + 0.6\cdot N_{Re}^{0.5}\cdot N_{Pr.w}(T_{f0})^{0.33} = 139.657$$

$$N_{Pr.w}(T_{f0}) = 8.552$$

$$h := \frac{N_{Nu}\cdot k_w(T_{f0})}{D} = 4.138\times 10^3\cdot\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$Q_0 := \pi\cdot D^2\cdot h\cdot(T_0 - T_a) = 52\cdot\text{W}$$

Il calore inizialmente va dalla sferetta all'acqua

Bilancio di energia allo stato stazionario (GEN = OUT)

$$\frac{\pi\cdot D^3}{6}\cdot G_{inf} = \pi\cdot D^2\cdot h\cdot(T_{ss} - T_a)$$

$$T_{ss} := \frac{D\cdot G_{inf}}{6\cdot h} + T_a = 34.166\cdot°\text{C}$$

Bilancio di energia allo stato non stazionario (ACC = - OUT + GEN)

$$\rho_s \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot C_P \cdot \frac{d}{dt} T(t) = -\pi \cdot D^2 \cdot h \cdot (T(t) - T_a) + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \left[G_{inf} + (G_0 - G_{inf}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

$$A_1 := \frac{6 \cdot h}{\rho_s \cdot C_P \cdot D} = 0.248 \frac{1}{s} \qquad A_2 := \frac{1}{\rho_s \cdot C_P} = 2 \times 10^{-7} \frac{m \cdot K \cdot s^2}{kg}$$

$$\frac{d}{dt} T + A_1 \cdot (T - T_a) = A_2 \cdot G(t) \qquad T(0) = T_0$$

Soluzione numerica

$$\text{Given} \qquad y'(x) + \frac{A_1}{s^{-1}} \cdot \left(y(x) - \frac{T_a}{K} \right) - \frac{A_2}{\frac{m \cdot K \cdot s^2}{kg}} \cdot \frac{G(x \cdot s)}{\frac{W}{m^3}} = 0 \qquad y(0) = \frac{T_0}{K}$$

$$y := \text{Odesolve}(x, 3600)$$

$$T_n(t) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow t \cdot s^{-1} \\ y(x) \cdot K \end{array} \right.$$

Soluzione analitica

$$\frac{d}{dt} T + A_1 \cdot T = A_2 \cdot \left[G_{inf} + (G_0 - G_{inf}) \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] + A_1 \cdot T_a = (A_1 \cdot T_a + A_2 \cdot G_{inf}) + A_2 \cdot (G_0 - G_{inf}) \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

fattore integrante $\exp(A_1 \cdot t)$

$$\exp(A_1 \cdot t) \cdot \left(\frac{d}{dt} T + A_1 \cdot T \right) = (A_1 \cdot T_a + A_2 \cdot G_{inf}) \cdot \exp(A_1 \cdot t) + A_2 \cdot (G_0 - G_{inf}) \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \cdot \exp(A_1 \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt} (T \cdot \exp(A_1 \cdot t)) = (A_1 \cdot T_a + A_2 \cdot G_{inf}) \cdot \exp(A_1 \cdot t) + A_2 \cdot (G_0 - G_{inf}) \cdot \exp(A_3 \cdot t) \qquad \text{con} \qquad A_3 := A_1 - \frac{1}{\tau} = 0.247 \frac{1}{s}$$

$$T(t) \cdot \exp(A_1 \cdot t) - T_0 = (A_1 \cdot T_a + A_2 \cdot G_{inf}) \cdot \int_0^t \exp(A_1 \cdot \eta) \, d\eta + A_2 \cdot (G_0 - G_{inf}) \cdot \int_0^t \exp(A_3 \cdot \eta) \, d\eta$$

essendo $\int_0^t \exp(A_i \cdot \eta) \, d\eta = \frac{1}{A_i} \cdot (\exp(A_i \cdot t) - 1)$ si ha

$$T(t) := \exp(-A_1 \cdot t) \cdot \left[T_0 + (A_1 \cdot T_a + A_2 \cdot G_{inf}) \cdot \left[\frac{1}{A_1} \cdot (\exp(A_1 \cdot t) - 1) \right] + A_2 \cdot (G_0 - G_{inf}) \cdot \left[\frac{1}{A_3} \cdot (\exp(A_3 \cdot t) - 1) \right] \right]$$

$$x := 0 .. 3600 \qquad t := 0 \cdot s, 1 \cdot s .. 3600 \cdot s$$