| Cognome | Nome | Matricola | Firma |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Problema 1**. Una lastrina quadrata, di lato $L$ e spessore $S$, contiene una molecola attiva a concentrazione iniziale $C_{A0}^{SOL}$. La lastrina viene immersa in un contenitore cilindrico, di diametro $D$, che contiene acqua inizialmente pura fino al livello $H$. Il liquido, a temperatura $T$, è agitato mediante un agitatore a pale di diametro $D_A$, che ruota alla velocità angolare $N$. I coefficienti di diffusività della molecola attiva nel polimero e nell'acqua sono rispettivamente $D_{AP}$ e $D_{AW}$, all'interfaccia tra lastrina e mezzo di dissoluzione si verifica un equilibrio tra le concentrazioni della molecola attiva descritto dalla legge $C_A^{LIQ} = KC_A^{SOL}$.

1. Calcolare la massa di molecola attiva inizialmente contenuta nella lastrina,
2. Calcolare il flusso iniziale di materia che esce dalla lastrina per convezione,
3. Determinare se il transitorio per descrivere il trasporto di materia nella lastrina va trattato a parametri concentrati o a parametri distribuiti e
4. Proporre un modello per descrivere come cambia la concentrazione della molecola attiva nella lastrina (fase solida) e nel recipiente (in fase liquida).

Dati. $L = 2$ cm, $S = 2$ mm, $C_{A0}^{SOL} = 4.5$ kg/m$^3$, $T = 37$°C, $D = 5$ cm, $H = 5$ cm, $D_A = 3$ cm, $N = 12$ giri/min, $D_{AP} = 10^{-6}$ cm$^2$/s, $D_{AW} = 10^{-5}$ cm$^2$/s, $K = 0.02$.

**Problema 2.** Una autovettura viaggia in piano ad una velocità $v$ erogando una potenza $P$.

1. Sapendo che una frazione $P_D$ della sua potenza è utilizzata per vincere la resistenza dell'aria (che è a temperatura $T_A$), che la proiezione del corpo sul piano ortogonale al moto ha una superficie $A$, di lunghezza caratteristica $\sqrt{A}$, e che per questo sistema il coefficiente di attrito si può calcolare con la relazione: $f(N_{Re}) = 0.3 + 10/[1 + (10^5 N_{Re})^{0.5}]$, determinare la velocità della autovettura.
2. Sapendo poi che l'autovettura è grigia di emissività $\varepsilon$, riceve una radiazione solare di flusso $q_s$, scambia calore attraverso una superficie $S$ per convezione e irraggiamento verso un ambiente che si può assimilare ad un corpo nero a temperatura $T_a$, uguale alla temperatura dell'aria, che per questo sistema vale una correlazione del tipo $j_H = 3.5 N_{Re}^{-0.5}$ (con lunghezza caratteristica $\sqrt{S}$) e infine che una frazione $P_T$ della sua potenza viene convertita in potenza termica nell'autovettura, calcolare la temperatura superficiale, $T$, dell'autovettura.

Dati.
$P = 120$ kW, $P_D = 80\%$, $A = 3$ m$^2$, $\varepsilon = 0.6$, $q_s = 800$ W/m$^2$, $S = 10$ m$^2$, $T_A = 20$°C, $P_T = 5\%$.

**Problema 1**. Una lastrina quadrata, di lato $L$ e spessore $S$, contiene una molecola attiva a concentrazione iniziale $C_{A0}^{SOL}$. La lastrina viene immersa in un contenitore cilindrico, di diametro $D$, che contiene acqua inizialmente pura fino al livello $H$. Il liquido, a temperatura $T$, è agitato mediante un agitatore a pale di diametro $D_A$, che ruota alla velocità angolare $N$. I coefficienti di diffusività della molecola attiva nel polimero e nell'acqua sono rispettivamente $D_{AP}$ e $D_{AW}$, all'interfaccia tra lastrina e mezzo di dissoluzione si verifica un equilibrio tra le concentrazioni della molecola attiva descritto dalla legge $C_A^{LIQ} = K C_A^{SOL}$.

1. Calcolare la massa di molecola attiva inizialmente contenuta nella lastrina,
2. Calcolare il flusso iniziale di materia che esce dalla lastrina per convezione,
3. Determinare se il transitorio per descrivere il trasporto di materia nella lastrina va trattato a parametri concentrati o a parametri distribuiti e
4. Proporre un modello per descrivere come cambia la concentrazione della molecola attiva nella lastrina (fase solida) e nel recipiente (in fase liquida).

Dati. $L = 2$ cm, $S = 2$ mm, $C_{A0}^{SOL} = 4.5$ kg/m$^3$, $T = 37$°C, $D = 5$ cm, $H = 5$ cm, $D_A = 3$ cm, $N = 12$ giri/min, $D_{AP} = 10^{-6}$ cm$^2$/s, $D_{AW} = 10^{-5}$ cm$^2$/s, $K = 0.02$.

$L := 2 \cdot cm$ $\quad S := 2mm$ $\quad C_{A0.SOL} := 4.5 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $\quad D := 5cm$ $\quad H := 5cm$ $\quad D_A := 3 \cdot cm$ $\quad N := 12 \cdot \frac{1}{min}$

$D_{AP} := 10^{-6} \cdot \frac{cm^2}{s}$ $\quad D_{AW} := 10^{-5} \cdot \frac{cm^2}{s}$ $\quad K_A := 0.02$ $\quad T := 37\,°C$ $\quad C_{A0.LIQ} := 0 \cdot \frac{kg}{m^3}$

$$m_0 := L^2 \cdot S \cdot C_{A0.SOL} = 3.6 \cdot mg$$

(eq. 18-18 p. 18-25, Perry 8th)

$$N_{Re} := \frac{D_A{}^2 \cdot N \cdot \rho_w(T)}{\mu_w(T)} = 249.651 \qquad N_{Sc} := \frac{\mu_w(T)}{\rho_w(T) \cdot D_{AW}} = 721.005 \qquad N_{Sh} := 0.36 \cdot N_{Re}{}^{\frac{2}{3}} \cdot N_{Sc}{}^{\frac{1}{3}} = 127.989$$

$$k_c := \frac{D_{AW}}{D_A} \cdot N_{Sh} = 4.266 \times 10^{-6} \frac{m}{s}$$

$$N_{A0} := k_c \cdot \left(K_A \cdot C_{A0.SOL} - C_{A0.LIQ}\right) = 0.384 \cdot \frac{mg}{m^2 \cdot s}$$

$$N_{A0} \cdot 2 \cdot L^2 = 3.072 \times 10^{-4} \cdot \frac{mg}{s}$$

$$N_{Bi.mat} := \frac{k_c \cdot K_A \cdot \frac{S}{2}}{D_{AP}} = 0.853$$

Parametri concentrati

Bilancio sul solido

$$L^2 \cdot S \cdot \left(\frac{d}{dt} C_{A.SOL}\right) = -W_A = -2 \cdot L^2 \cdot N_A = -2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot \left(K_A \cdot C_{A.SOL} - C_{A.LIQ}\right) \qquad @\ t = 0 \qquad C_{A.SOL}(t = 0) = C_{A0.SOL}$$

Bilancio sul liquido

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H \cdot \left(\frac{d}{dt} C_{A.LIQ}\right) = W_A = 2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot \left(K_A \cdot C_{A.SOL} - C_{A.LIQ}\right) \qquad C_{A.LQIQ}(t = 0) = C_{A0.LIQ}$$

$$\frac{d}{dt}\left(K_A \cdot C_{A.SOL}\right) = \frac{-2 \cdot k_c \cdot K_A}{S}\left(K_A \cdot C_{A.SOL} - C_{A.LIQ}\right) \qquad \frac{d}{dt} C_{A.LIQ} = \frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H} \cdot \left(K_A \cdot C_{A.SOL} - C_{A.LIQ}\right)$$

$$\delta_A = \left(K_A \cdot C_{A.SOL} - C_{A.LIQ}\right)$$

$$\tau := -\left(\frac{-2 \cdot k_c \cdot K_A}{S} - \frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H}\right)^{-1} = 8.327 \times 10^3 s \qquad 5 \cdot \tau = 11.565 \cdot hr$$

$$\frac{d}{dt}\delta_A = \left(\frac{-2 \cdot k_c \cdot K_A}{S} - \frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H}\right) \cdot \delta_A$$

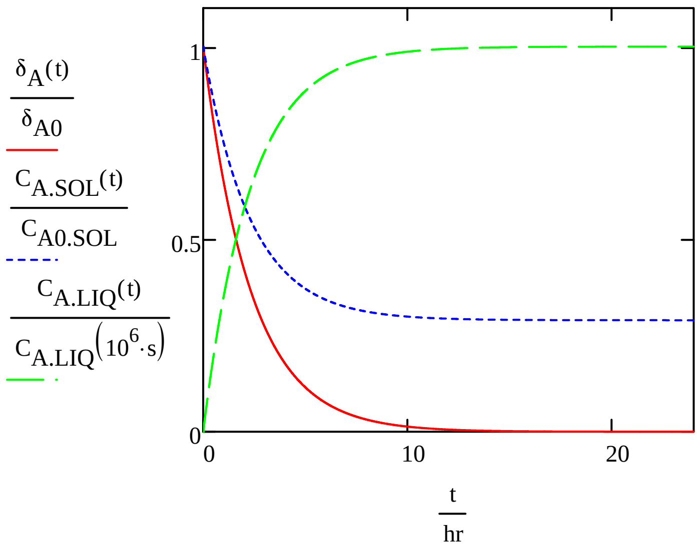
$$\delta_{A0} := K_A \cdot C_{A0.SOL} - C_{A0.LIQ} = 0.09 \frac{kg}{m^3} \qquad \delta_A(t) := \delta_{A0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\frac{\delta_A(5 \cdot \tau)}{\delta_{A0}} = 6.738 \times 10^{-3}$$

$$\frac{d}{dt} C_{A.SOL} = \frac{-2 \cdot k_c}{S} \cdot \delta_{A0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad ====> \quad C_{A.SOL}(t) := C_{A0.SOL} + \frac{-2 \cdot k_c}{S} \cdot \delta_{A0} \cdot (-\tau) \cdot \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)$$

$$\frac{d}{dt} C_{A.LIQ} = \frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H} \cdot \delta_{A0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad ====> \quad C_{A.LIQ}(t) := C_{A0.LIQ} + \frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H} \cdot \delta_{A0} \cdot (-\tau) \cdot \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)$$

$$t := 0 \cdot s, 1 \cdot s .. 3600 \cdot s \cdot 24$$




$$C_{A0.SOL} = 4.5 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{A0.SOL} + \frac{2 \cdot k_c \cdot K_A}{S} \cdot \delta_{A0} \cdot (-\tau) = 4.436 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{A.SOL}\left(10^6 \cdot s\right) = 1.303 \frac{kg}{m^3}$$

$$-\frac{2 \cdot L^2 \cdot k_c \cdot 4}{\pi \cdot D^2 \cdot H} \cdot \delta_{A0} \cdot (-\tau) = 0.026 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{A.LIQ}\left(10^6 \cdot s\right) = 0.026 \frac{kg}{m^3}$$

Soluzione di stato stazionario

$$m_0 = C_{A.SS.SOL} \cdot L^2 \cdot S + C_{A.SS.LIQ} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H ====>$$

$$C_{A.SS.SOL} \cdot K_A = C_{A.SS.LIQ}$$

$$C_{A.SS.SOL} := \frac{m_0}{\frac{\pi \cdot H \cdot K_A \cdot D^2}{4} + S \cdot L^2} \qquad C_{A.SS.SOL} = 1.303 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{A.SS.LIQ} := K_A \cdot C_{A.SS.SOL} \qquad C_{A.SS.LIQ} = 0.026 \frac{kg}{m^3}$$

**Problema 2.** Una autovettura viaggia in piano ad una velocità $v$ erogando una potenza $P$.

1. Sapendo che una frazione $P_D$ della sua potenza è utilizzata per vincere la resistenza dell'aria (che è a temperatura $T_A$), che la proiezione del corpo sul piano ortogonale al moto ha una superficie $A$, di lunghezza caratteristica $\sqrt{A}$, e che per questo sistema il coefficiente di attrito si può calcolare con la relazione: $f(N_{Re}) = 0.3 + 10/[1 + (10^5 N_{Re})^{0.5}]$, determinare la velocità della autovettura.
2. Sapendo poi che l'autovettura è grigia di emissività ε, riceve una radiazione solare di flusso $q_s$, scambia calore attraverso una superficie $S$ per convezione e irraggiamento verso un ambiente che si può assimilare ad un corpo nero a temperatura $T_a$, uguale alla temperatura dell'aria, che per questo sistema vale una correlazione del tipo $j_H = 3.5 N_{Re}^{-0.5}$ (con lunghezza caratteristica $\sqrt{S}$) e infine che una frazione $P_T$ della sua potenza viene convertita in potenza termica nell'autovettura, calcolare la temperatura superficiale, $T$, dell'autovettura.

Dati.

$P = 120$ kW, $P_D = 80\%$, $A = 3$ m², $\varepsilon = 0.6$, $q_s = 800$ W/m², $S = 10$ m², $T_A = 20$°C, $P_T = 5\%$.

$P := 120 \cdot kW \quad P_D := 80\% \quad A := 3 \cdot m^2 \quad \varepsilon := 0.6 \quad q_s := 800 \cdot \frac{W}{m^2} \quad T_A := 20\,°C \quad P_T := 5\% \quad S := 10 \cdot m^2$

$P \cdot P_D = F_D \cdot v = f \cdot A \cdot \frac{\rho_A \cdot v^2}{2} v \qquad v := 1 \cdot \frac{m}{s} \qquad f(N_{Re}) := 0.3 + \frac{10}{1 + (10^5 \cdot N_{Re})^{0.5}}$

$\rho_A(T_A) = 1.209 \frac{kg}{m^3} \qquad \mu_A(T_A) = 1.816 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s} \qquad v_{HighReynolds} := \left(\frac{2 \cdot P \cdot P_D}{A \cdot 0.3 \cdot \rho_A(T_A)}\right)^{\frac{1}{3}} = 56.086 \frac{m}{s}$

Given $\qquad P \cdot P_D = f\left(\frac{v \cdot \sqrt{A} \cdot \rho_A(T_A)}{\mu_A(T_A)}\right) \cdot A \cdot \frac{\rho_A(T_A) \cdot v^2}{2} \cdot v \qquad v := \mathrm{Minerr}(v) = 56.085 \frac{m}{s} \qquad v = 201.907 \cdot \frac{km}{hr}$

$N_{Re} := \frac{v \cdot \sqrt{S} \cdot \rho_A(T_A)}{\mu_A(T_A)} = 1.181 \times 10^7 \qquad j_H := 3.5 \cdot N_{Re}^{-0.5} = 1.018 \times 10^{-3}$

$N_{Nu} := j_H \cdot N_{Re} \cdot N_{Pr.A}(T_A)^{\frac{1}{3}} = 1.075 \times 10^4 \qquad h := N_{Nu} \cdot \frac{k_A(T_A)}{\sqrt{S}} = 86.877 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$h(T) := j_H \cdot \frac{v \cdot \sqrt{S} \cdot \rho_A\left(\frac{T_A + T}{2}\right)}{\mu_A\left(\frac{T_A + T}{2}\right)} \cdot N_{Pr.A}\left(\frac{T_A + T}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{k_A\left(\frac{T_A + T}{2}\right)}{\sqrt{S}} \qquad h(T_A) = 86.877 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$T := 30\,°C \quad$ Given $\quad P \cdot P_T + q_s \cdot S = h(T) \cdot S \cdot (T - T_A) + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \cdot (T^4 - T_A^4) \qquad T := \mathrm{Minerr}(T) = 35.881 \cdot °C$

$h(T) = 84.441 \cdot W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$