Principi di Ingegneria Chimica
Anno Accademico 2016-2017

Cognome	Nome	Matricola	Firma

E-mail:

Problema 1. Una sferetta di cloruro di sodio, di diametro iniziale D_0, è immersa in un recipiente molto grande contenente acqua pura. La fluidodinamica locale è tale che nei pressi della sfera l'acqua si può considerare completamente stagnante. La densità del cloruro di sodio sia ρ_A, la sua solubilità in acqua sia S, la sua diffusività in acqua sia $\mathfrak{D}_{AB}$. Calcolare:

1. Il flusso iniziale di cloruro di sodio dalla sfera verso la massa di acqua;
2. Il tempo necessario alla completa dissoluzione della sfera.
3. Nell'ipotesi che il volume di liquido (acqua inizialmente pura) sia finito e pari a V, e che il recipiente sia agitato in modo che la fluidodinamica locale vicino alla superficie della sfera sia descrivibile mediante una velocità v_∞, proporre il modello descrittivo dell'evoluzione nel tempo in questo caso (equazioni differenziali, condizioni iniziali, eventuali equazioni algebriche necessarie a completare il sistema), e indicare un metodo di soluzione.

Dati. $D_0 = 1$ cm, $\rho_A = 2160$ kg/m^3, $S = 320$ kg/m^3, $\mathfrak{D}_{AB} = 1.5\cdot10^{-9}$ m^2/s.

Problema 2. Una portata di acqua a temperatura T_1 viene fatta scorrere, in regime laminare, su un di un piano quadrato di lato L, inclinato rispetto alla verticale di un angolo β. Il piano è mantenuto alla temperatura T_w, per cui l'acqua scorrendovi sopra si riscalda fino alla temperatura T_2. In queste condizioni, il film di liquido che si stabilisce ha uno spessore δ. Le perdite di calore si possono trascurare, dunque tutto il calore ceduto dal piano inclinato, $\dot{Q}$, viene conferito all'acqua. I parametri fisici dell'acqua si possono considerare costanti come se l'acqua fosse alla sua temperatura media aritmetica. Calcolare:

1. La portata volumetrica di acqua che scorre sul piano inclinato;
2. La temperatura finale dell'acqua, T_2;
3. Il coefficiente di scambio interfase medio per questo sistema.

Dati. $T_1 = 20$°C, $L = 1$ m, $\beta = 30°$, $\delta = 0.1$ mm, $T_w = 40$°C, $\dot{Q} = 130$ W.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Prova scritta – 5 settembre 2017

Problema 1. Una sferetta di cloruro di sodio, di diametro iniziale D_0, è immersa in un recipiente molto grande contenente acqua pura. La fluidodinamica locale è tale che nei pressi della sfera l'acqua si può considerare completamente stagnante. La densità del cloruro di sodio sia ρ_A, la sua solubilità in acqua sia S, la sua diffusività in acqua sia $\mathfrak{D}_{AB}$. Calcolare:

1. Il flusso iniziale di cloruro di sodio dalla sfera verso la massa di acqua;
2. Il tempo necessario alla completa dissoluzione della sfera.
3. Nell'ipotesi che il volume di liquido (acqua inizialmente pura) sia finito e pari a V, e che il recipiente sia agitato in modo che la fluidodinamica locale vicino alla superficie della sfera sia descrivibile mediante una velocità v_∞, proporre il modello descrittivo dell'evoluzione nel tempo in questo caso (equazioni differenziali, condizioni iniziali, eventuali equazioni algebriche necessarie a completare il sistema), e indicare un metodo di soluzione.

Dati $D_0 = 1$ cm, $\rho_A = 2160$ kg/m³, $S = 320$ kg/m³, $\mathfrak{D}_{AB} = 1.5\cdot10^{-9}$ m²/s.

$$D_0 := 1\cdot\mathrm{cm} \qquad \rho_A := 2160\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad S := 320\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad D_{AB} := 1.5\cdot10^{-9}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \qquad M_A := 58.5\cdot\frac{\mathrm{gm}}{\mathrm{mol}} \qquad R_0 := \frac{D_0}{2}$$

$$N_{Sh} := 2 \qquad k_{C0} := N_{Sh}\cdot\frac{D_{AB}}{D_0} = 3\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad C_{As} := \frac{S}{M_A} = 5.47\times10^{3}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^3} \qquad N_{A0} := k_{C0}C_{As} = 1.641\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}}$$

Bilancio di materia
$$\rho_A\cdot\frac{d}{dt}V = \rho_A\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right) = \rho_A\cdot4\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{d}{dt}R = -A\cdot k_C M_A\cdot C_{As} = -4\cdot\pi\cdot R^2\cdot N_{Sh}\cdot M_A\cdot\frac{D_{AB}}{2\cdot R}\cdot C_{As}$$

Essendo $N_{Sh} := 2$ e semplificando
$$\rho_A\cdot\frac{d}{dt}R = -\frac{D_{AB}\cdot M_A}{R}\cdot C_{As} \quad \text{ovvero} \quad R\cdot\frac{d}{dt}R = -\frac{D_{AB}\cdot M_A\cdot C_{As}}{\rho_A}$$

con
$$\frac{D_{AB}\cdot M_A\cdot C_{As}}{\rho_A} = 2.222\times10^{-10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \qquad \text{I.C.} \quad R(t=0) = R_0 = \frac{D_0}{2}$$

integrando
$$\frac{R^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} = -\frac{D_{AB}\cdot M_A\cdot C_{As}}{\rho_A}\cdot t \qquad R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2\cdot\frac{D_{AB}\cdot M_A\cdot C_{As}}{\rho_A}\cdot t}$$

il raggio si annulla (cioè la sfera si dissolve) per
$$t_1 := R_0^2\cdot\left(2\cdot\frac{D_{AB}\cdot M_A\cdot C_{As}}{\rho_A}\right)^{-1} = 5.625\times10^{4}\,\mathrm{s} \qquad t_1 = 937.5\,\mathrm{min} \qquad t_1 = 15.625\,\mathrm{hr}$$

Se la fluidodinamica non è di acqua stagnante, allora
$$N_{Sh} = 2 + 0.6\cdot N_{Re}^{0.5}\cdot N_{Pr}^{0.33} = 2 + 0.6\cdot N_{Pr}^{0.33}\cdot\left(\frac{v_{inf}\cdot\rho\cdot2}{\mu}\right)^{0.5}\cdot R^{0.5}$$

ovvero
$$k_C(R) = \frac{D_{AB}}{2}\cdot\left(\frac{2 + a\cdot R^{0.5}}{R}\right) \quad \text{(eq. A)} \qquad \text{con} \qquad a = 0.6\cdot N_{Pr}^{0.33}\cdot\left(\frac{v_{inf}\cdot\rho\cdot2}{\mu}\right)^{0.5}$$

Bilancio di materia sulla sfera
$$\rho_A\cdot\frac{d}{dt}R = -M_A\cdot k_C(R(t))\cdot\left(C_{As} - C_{A.liq}(t)\right) \quad \text{(eq. B)} \qquad \text{I.C.1} \quad R(t=0) = R_0$$

Bilancio di materia nel liquido
$$V\cdot\frac{d}{dt}C_{A.liq} = M_A\cdot4\cdot\pi\cdot R^2\cdot k_C(R(t))\cdot\left(C_{As} - C_{A.liq}(t)\right) \quad \text{(eq. C)} \qquad \text{I.C.2} \quad C_{A.liq}(t=0) = 0$$

Il modello completo è composto dalle ODEs (eqq. B e C) e dall'equazione algebrica (eq. A).
Si può risolvere con un metodo numerico (p.eq. alle differenze finite).

Problema 2. Una portata di acqua a temperatura T_1 viene fatta scorrere, in regime laminare, su un di un piano quadrato di lato L, inclinato rispetto alla verticale di un angolo β. Il piano è mantenuto alla temperatura T_w, per cui l'acqua scorrendovi sopra si riscalda fino alla temperatura T_2. In queste condizioni, il film di liquido che si stabilisce ha uno spessore δ. Le perdite di calore si possono trascurare, dunque tutto il calore ceduto dal piano inclinato, $\dot{Q}$, viene conferito all'acqua. I parametri fisici dell'acqua si possono considerare costanti come se l'acqua fosse alla sua temperatura media aritmetica. Calcolare:

1. La portata volumetrica di acqua che scorre sul piano inclinato;
2. La temperatura finale dell'acqua, T_2;
3. Il coefficiente di scambio interfase medio per questo sistema.

Dati. $T_1 = 20°C$, $L = 1$ m, $\beta = 30°$, $\delta = 0.1$ mm, $T_w = 40°C$, $\dot{Q} = 130$ W.

$T_1 := 20\,°C \qquad L := 1\cdot m \qquad \beta := 30\cdot deg \qquad T_w := 40\,°C \qquad \delta := 0.1\cdot mm \qquad Q_{dot} := 130\cdot W$

Equazione 2.2-19 di pagina 37 (Bird et al. 1° ed.)

$$V_{dot} = \frac{\rho_w(T_a)}{\mu_w(T_a)}\cdot\frac{g\cdot L\cdot\delta^3\cdot\cos(\beta)}{3}$$

Bilancio di energia sull'acqua

$$Q_{dot} = \rho_w(T_a)\cdot C_{P.w}(T_a)\cdot V_{dot}\cdot(T_2 - T_1)$$

Due equazioni nelle due incognite V.dot e T.2. Soluzione per tentativi:

$T_2 := 25\,°C \qquad$ Given

$$Q_{dot} = \rho_w\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)\cdot C_{P.w}\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)\cdot\left[\frac{\rho_w\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)}{\mu_w\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)}\cdot\frac{g\cdot L\cdot\delta^3\cdot\cos(\beta)}{3}\right]\cdot(T_2 - T_1)$$

$$T_2 := \text{Minerr}(T_2) = 30.056\cdot°C$$

$$T_a := \frac{T_1+T_2}{2} = 25.028\cdot°C \qquad V_{dot} := \frac{\rho_w(T_a)}{\mu_w(T_a)}\cdot\frac{g\cdot L\cdot\delta^3\cdot\cos(\beta)}{3} = 3.102\times10^{-6}\,\frac{m^3}{s} \qquad N_{Re} := 4\cdot\frac{V_{dot}}{L}\cdot\frac{\rho_w(T_a)}{\mu_w(T_a)} = 13.597$$

$$C_{P.w}(T_a) = 4.179\times10^3\cdot\frac{J}{kg\cdot K} \qquad \rho_w(T_a) = 997.273\,\frac{kg}{m^3} \qquad \mu_w(T_a) = 9.101\times10^{-4}\,\frac{kg}{m\cdot s} \qquad k_w(T_a) = 0.606\cdot\frac{W}{m\cdot K}$$

$$\Delta T_{ml} := \frac{(T_w - T_1) - (T_w - T_2)}{\ln\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right)} = 14.391\,K \qquad h := \frac{Q_{dot}}{L^2\cdot\Delta T_{ml}} = 9.033\cdot\frac{W}{m^2\cdot K}$$