Principi di Ingegneria Chimica
Anno Accademico 2016-2017

Cognome	Nome	Matricola	Firma

E-mail:

Problema 1. Una sferetta costituita da un materiale polimerico (composto B) e una molecola attiva (composto A), cade alla sua velocità terminale, v_∞, in un volume molto grande pieno di un fluido (composto C). Il polimero B è insolubile nel fluido C e il fluido C non può diffondere nel polimero B, mentre il composto A è capace di diffondere sia nel polimero, con diffusività D_{AB}, che nel fluido, con diffusività D_{AC}. La sferetta ha diametro D, densità apparente ρ_S e concentrazione iniziale di composto A C_{A0}^{SOL}. Il fluido ha densità ρ_f, viscosità μ_f e in condizioni iniziale contiene composto A alla concentrazione C_{A0}^{FLU}. Il sistema è isotermo e isobaro. Tra la concentrazione in fase solida e la concentrazione in fase fluida si può scrivere la relazione di equilibrio: $C_A^{SOL} = KC_A^{FLU}$. Calcolare:

1. Il diametro della sferetta;
2. Il coefficiente di scambio di materia in fase fluida, k_C, e il flusso iniziale di A, N_{A0}, chiarendone il verso;
3. Chiarendo se il transitorio di scambio di materia va analizzato a parametri concentrati o a parametri distribuiti, la concentrazione del composto A al centro della sferetta dopo un tempo t_1.

Dati. $v_\infty = 0.33$ m/s, $D_{AB} = 10^{-8}$ m^2/s, $D_{AC} = 10^{-7}$ m^2/s, $\rho_S = 2370$ kg/m^3, $C_{A0}^{SOL} = 2$ mol/m^3, $\rho_f = 1000$ kg/m^3, $\mu_f = 0.001$ Pa·s, $C_{A0}^{FLU} = 0.004$ mol/m^3, $K = 10^4$, $t_1 = 2$ ore.

Problema 2. Un recipiente cilindrico contiene acqua liquida in condizioni di incipiente solidificazione a pressione normale, in modo che la parete interna sia alla temperatura di fusione normale dell'acqua. Tra la parete interna, di raggio R_1, e la parete esterna, di raggio R_2, c'è una intercapedine sede di una reazione endoenergetica che causa una generazione di calore volumetrica pari a G. L'intercapedine è costituita di un materiale solido di conducibilità k. Le pareti che confinano il solido reagente sono di spessore trascurabile. Il cilindro è investito ortogonalmente al suo asse da acqua a temperatura T_a con velocità v_a.

1. Calcolare il coefficiente di scambio termico interfase, h, tra fluido e cilindro. Considerare le proprietà del fluido alla temperatura T_a;
2. Scrivere le equazioni di bilancio con le necessarie condizioni al contorno per risolvere il problema di trasporto di calore nell'intercapedine allo stato stazionario, cioè il modello per calcolare la funzione obiettivo $T = T(r)$, e risolverlo;
3. Diagrammare la funzione calcolata al precedente punto 2, calcolare la temperatura superficiale del cilindro e il flusso di calore che il cilindro scambia con l'acqua esterna (chiarendone il verso).

Dati. $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 4$ cm, $G = -10^6$ W/m^3, $k = 1$ W/(m·K), $T_0 = 0$ °C, $T_a = 10$ °C, $v_a = 33$ m/s.

Istruzioni: compilare innanzitutto con i propri dati la parte alta di questo foglio; per le risposte utilizzare solo questo foglio.

Problema 1. Una sferetta costituita da un materiale polimerico (composto B) e una molecola attiva (composto A), cade alla sua velocità terminale, v_∞, in un volume molto grande pieno di un fluido (composto C). Il polimero B è insolubile nel fluido C e il fluido C non può diffondere nel polimero B, mentre il composto A è capace di diffondere sia nel polimero, con diffusività D_{AB}, che nel fluido, con diffusività D_{AC}. La sferetta ha diametro D, densità apparente ρ_S e concentrazione iniziale di composto A C_{A0}^{SOL}. Il fluido ha densità ρ_f, viscosità μ_f e in condizioni iniziale contiene composto A alla concentrazione C_{A0}^{FLU}. Il sistema è isotermo e isobaro. Tra la concentrazione in fase solida e la concentrazione in fase fluida si può scrivere la relazione di equilibrio: $C_A^{SOL} = KC_A^{FLU}$. Calcolare:

1. Il diametro della sferetta;
2. Il coefficiente di scambio di materia in fase fluida, k_C, e il flusso iniziale di A, N_{A0}, chiarendone il verso;
3. Chiarendo se il transitorio di scambio di materia va analizzato a parametri concentrati o a parametri distribuiti, la concentrazione del composto A al centro della sferetta dopo un tempo t_1.

Dati. $v_\infty = 0.33$ m/s, $D_{AB} = 10^{-8}$ m²/s, $D_{AC} = 10^{-7}$ m²/s, $\rho_S = 2370$ kg/m³, $C_{A0}^{SOL} = 2$ mol/m³, $\rho_f = 1000$ kg/m³, $\mu_f = 0.001$ Pa·s, $C_{A0}^{FLU} = 0.004$ mol/m³, $K = 10^4$, $t_1 = 2$ ore.

$\mu_f := 0.001 \cdot \frac{kg}{m \cdot s}$ $\quad \rho_f := 1000 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $\quad \rho_s := 2370 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $\quad v_{inf} := 0.33 \cdot \frac{m}{s}$ $\quad D_{AB} := 10^{-8} \cdot \frac{m^2}{s}$ $\quad D_{AC} := 10^{-7} \cdot \frac{m^2}{s}$

$\Delta\rho := \rho_s - \rho_f$ $\quad C_1 := \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot \mu_f}{\rho_f{}^2 \cdot v_{inf}{}^3} = 4.985 \times 10^{-4}$ $\quad K_{eq} := 10^4$ $\quad C_{A0.SOL} := 2 \cdot \frac{mol}{m^3}$ $\quad C_{A0.FLU} := 0.004 \cdot \frac{mol}{m^3}$

$t_1 := 2 \cdot hr$

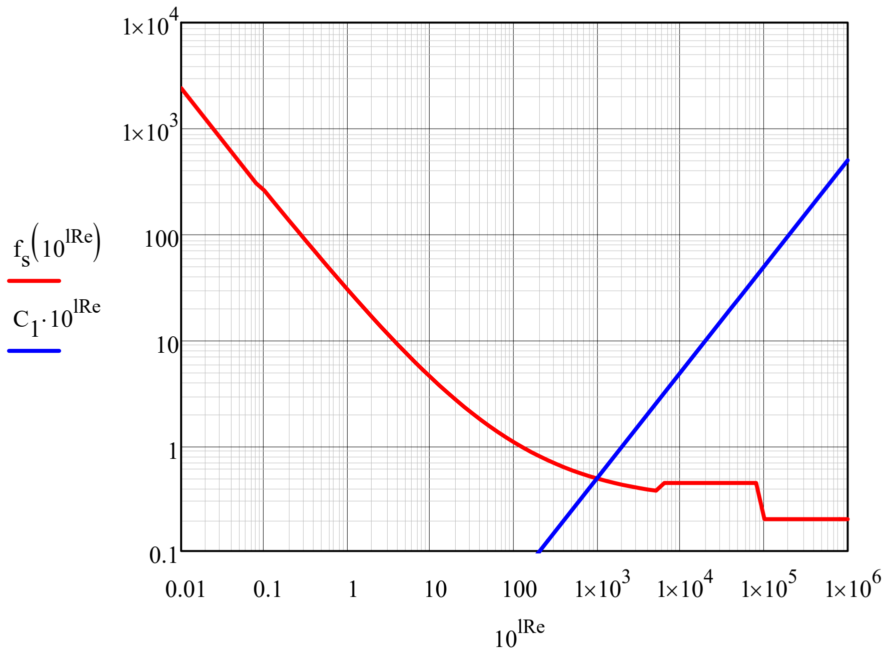
$\nu_f := \mu_f \cdot \rho_f{}^{-1}$ $\quad lRe := -2, -1.9 .. 6$ $\quad f_1 := 1$ $\quad N_{Re} := 1$

Given

$f_1 = f_s(N_{Re})$

$f_1 = C_1 \cdot N_{Re}$

$\begin{pmatrix} f_1 \\ N_{Re} \end{pmatrix} := \text{Minerr}(f_1, N_{Re}) = \begin{pmatrix} 0.487 \\ 976.029 \end{pmatrix}$



$D := \frac{N_{Re} \cdot \mu_f}{v_{inf} \cdot \rho_f} = 2.958\,mm$

$N_{Sc} := \frac{\nu_f}{D_{AC}} = 10$

$N_{Sh} := 2 + 0.6 \cdot N_{Re}{}^{0.5} \cdot N_{Sc}{}^{0.33} = 42.076$

$k_c := N_{Sh} \cdot \frac{D_{AC}}{D} = 1.423 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$

$N_{A0} := k_c \cdot \left(\frac{C_{A0.SOL}}{K_{eq}} - C_{A0.FLU} \right) = -5.406 \times 10^{-6} \frac{mol}{s \cdot m^2}$

Il flusso di materia (ipotizzato dal solido al fluido) risulta negativo (cioè è diretto dal fluido al solido)

$\frac{D_{AB}}{D} \cdot \Delta C_{A.SOL} = k_c \cdot \Delta C_{A.FLU} = k_c \cdot \frac{\Delta C_{A.SOL}}{K_{eq}}$

$N_{Bi.AB} := \frac{k_c \cdot D}{K_{eq} \cdot D_{AB}} = 0.042$

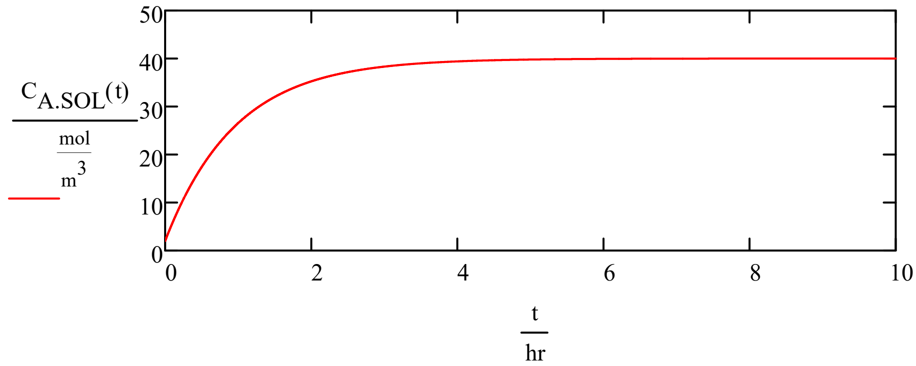
Parametri concentrati

Bilancio di materia di A nella sfera

$$\frac{\pi \cdot D^3}{6}\cdot\left(\frac{d}{dt}C_{A.SOL}\right) = \pi\cdot D^2\cdot\frac{k_c}{K_{eq}}\cdot\left(K_{eq}\cdot C_{A0.FLU} - C_{A.SOL}\right) \qquad C_{A.SOL}(t = 0) = C_{A0.SOL}$$

$$\tau := \frac{K_{eq}\cdot D}{6\cdot k_c} = 3.465\times 10^3\,s \qquad \ln\left(\frac{K_{eq}\cdot C_{A0.FLU} - C_{A.SOL}(t)}{K_{eq}\cdot C_{A0.FLU} - C_{A0.SOL}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$C_{A.SOL}(t) := K_{eq}\cdot C_{A0.FLU} + \left(C_{A0.SOL} - K_{eq}\cdot C_{A0.FLU}\right)\cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad t := 0\cdot s, 1\cdot s .. 10\cdot hr$$



$$C_{A.SOL}(t_1) = 35.243\,\frac{mol}{m^3}$$

Problema 2. Un recipiente cilindrico contiene acqua liquida in condizioni di incipiente solidificazione a pressione normale, in modo che la parete interna sia alla temperatura di fusione normale dell'acqua. Tra la parete interna, di raggio R_1, e la parete esterna, di raggio R_2, c'è una intercapedine sede di una reazione endoenergetica che causa una generazione di calore volumetrica pari a G. L'intercapedine è costituita di un materiale solido di conducibilità k. Le pareti che confinano il solido reagente sono di spessore trascurabile. Il cilindro è investito ortogonalmente al suo asse da acqua a temperatura T_a con velocità v_a.

1. Calcolare il coefficiente di scambio termico interfase, h, tra fluido e cilindro. Considerare le proprietà del fluido alla temperatura T_a;
2. Scrivere le equazioni di bilancio con le necessarie condizioni al contorno per risolvere il problema di trasporto di calore nell'intercapedine allo stato stazionario, cioè il modello per calcolare la funzione obiettivo $T = T(r)$, e risolverlo;
3. Diagrammare la funzione calcolata al precedente punto 2, calcolare la temperatura superficiale del cilindro e il flusso di calore che il cilindro scambia con l'acqua esterna (chiarendone il verso).

Dati $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 4$ cm, $G = -10^6$ W/m³, $k = 1$ W/(m·K), $T_0 = 0$ °C, $T_a = 10$ °C, $v_a = 33$ m/s.

$$G := -10^6\cdot\frac{W}{m^3} \qquad R_1 := 3\cdot cm \qquad R_2 := 4\cdot cm \qquad k := 1\cdot\frac{W}{m\cdot K} \qquad T_0 := 0\,°C \qquad T_a := 10\,°C$$

$$D := 2\cdot R_2 \qquad v_a := 33\cdot\frac{m}{s}$$

$$N_{Re} := \frac{v_a\cdot D}{\nu_A(T_a)} = 1.877\times 10^5 \qquad N_{Nu} := \left(0.4\cdot N_{Re}^{0.5} + 0.06\cdot N_{Re}^{\frac{2}{3}}\right)\cdot N_{Pr.A}(T_a)^{0.4} = 323.451$$

$$h := N_{Nu}\cdot\frac{k_A(T_a)}{D} = 100.353\cdot\frac{W}{m^2\cdot K}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot q_r\right) = G$$ Bilancio di energia

(A) $$q_r = \frac{G\cdot r}{2} + \frac{C_1}{r}$$ profilo generalizzato del flusso di calore

$$-k\cdot\frac{d}{dr}T = \frac{G\cdot r}{2} + \frac{C_1}{r}$$ Equazione di Fourier nel profilo del flusso

(B) $$T = \frac{-G\cdot r^2}{4\cdot k} - \frac{C_1}{k}\cdot\ln(r) + C_2$$ profilo generalizzato della temperatura

$$T\left(r = R_1\right) = T_0$$ BC 1 - temperatura imposta a R.1

$$q_r\left(r = R_2\right) = h\cdot\left(T\left(r = R_2\right) - T_a\right)$$ BC 2 - flusso conduttivo = flusso convettivo a R.2

Usando la BC 1

$$C_2 = T_0 + \frac{C_1\cdot\ln\left(R_1\right)}{k} + \frac{G\cdot R_1^{\,2}}{4\cdot k}$$

Sostituendo nella (B) e riordinando

(C) $$T = T_0 + \frac{G\cdot R_1^{\,2}}{4\cdot k}\cdot\left[1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right] - \frac{C_1}{k}\cdot\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

Usando la BC 2 nella (C), dopo qualche passaggio

$$C_1 := -\frac{G\cdot R_2^{\,3}\cdot h + 2\cdot G\cdot R_2^{\,2}\cdot k - 4\cdot R_2\cdot T_0\cdot h\cdot k + 4\cdot R_2\cdot T_a\cdot h\cdot k - G\cdot R_1^{\,2}\cdot R_2\cdot h}{4\cdot k + 4\cdot R_2\cdot h\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 678.642\,\frac{kg\cdot m}{s^3}$$

Riarrangiando

$$C_1 := \frac{R_2}{\left(\frac{1}{h} + \frac{R_2}{k}\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}\cdot\left[\left(T_0 - T_a\right) - \frac{G}{4}\cdot\left(\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{k} + \frac{2\cdot R_2}{h}\right)\right] = 678.642\,\frac{kg\cdot m}{s^3}$$

Introducendo C.1 nella (C) e riordinando

$$T(r) := T_0 + \frac{G\cdot R_1^{\,2}}{4\cdot k}\cdot\left[1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right] - \frac{1}{k}\cdot\left[\frac{R_2}{\left(\frac{1}{h} + \frac{R_2}{k}\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}\cdot\left[\left(T_0 - T_a\right) - \frac{G}{4}\cdot\left(\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{k} + \frac{2\cdot R_2}{h}\right)\right]\right]\cdot\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \quad \text{(D)}$$

Introducendo C.1 nella (A) e riordinando:

$$q_r(r) := \left[\frac{G\cdot r}{2} + \frac{R_2}{r\cdot\left(\frac{1}{h} + \frac{R_2}{k}\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}\cdot\left[\left(T_0 - T_a\right) - \frac{G}{4}\cdot\left(\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{k} + \frac{2\cdot R_2}{h}\right)\right]\right] \quad \text{(E)}$$

Si noti che l'equazione (C) e l'equazione (D) sono la stessa cosa, solo che nella (C) la costante C.1 non è esplicitata.
Allo stesso modo le equazioni (A) ed (E) sono equivalenti, solo che nella (A) la costante C.1 non è esplicitata.

Temperatura superficiale $\quad T(R_2) = -20.233 \cdot °C \qquad T(R_2) = 252.917\ K$

$$\frac{G\cdot\left(R_1^2 - R_2^2 + 2\cdot R_2^2\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right) + 4\cdot\left(T_0\cdot k + T_a\cdot R_2\cdot h\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}{4\cdot\left(k + R_2\cdot h\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)} = -20.233\cdot °C$$

Flusso alla parete $\quad q_r(R_2) = -3.034\times 10^3\cdot\frac{W}{m^2}$

Flusso negativo, cioè diretto contro l'asse r, cioè entrante nel cilindro.

$$\frac{h\cdot\left[G\cdot\left(R_1^2 - R_2^2 + 2\cdot R_2^2\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right) + 4\cdot k\cdot\left(T_0 - T_a\right)\right]}{4\cdot\left(k + R_2\cdot h\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)} = -3.034\times 10^3\ \frac{kg}{s^3}$$

$$r := R_1, R_1 + \frac{R_2 - R_1}{100} .. R_2$$